ÜBER DIE AUSBREITUNG DER WELLEN DER DRAHTLOSEN TELEGRAPHIE AUF DER ERDKUGEL

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)
DER KGL. BAYRISCHEN LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN

VORGELEGT AM 13. JUNI 1911

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VON

HERMAN W. MARCH

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548308_0082

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung und Ergebnisse 5

Kapitel I. Allgemeine Lösung des Problems durch Reihen.

§ 1. Die Differentialgleichung des Problems 7
§ 2. Ansätze für das Potential in den verschiedenen Gebieten 11
§ 3. Koeffizientenbestimmung. Sender außerhalb der Erde 13
§ 4. Betrachtung der Grenzfälle 14
§ 5. Sender innerhalb der Erde 15
§ 6. Vergleich mit Poincaré 17
§ 7. Vergleich mit Nicholson 18
§ 8. Bemerkung über die Lösung durch Reihen 19

Kapitel II. Darstellung einer willkürlichen Funktion auf der Kugel durch ein Doppelintegral mit Kugelfunktionen.

§ 1. Lösung einer vorbereitenden Integralgleichung bei analytischem Charakter von ψ 20
§ 2. Einführung komplexer Integrationswege und Erledigung des Punktes $z = 1$ 22
§ 3. Hilfssatz betreffend die Umkehrung der Integrationsfolge in gewissen komplexen Integralen 24
§ 4. Heranziehen der Fourierschen Integraldarstellung 25
§ 5. Verallgemeinerung auf den Fall einer nicht analytischen Funktion ψ . . 26
§ 6. Untersuchung der Funktion $\zeta_\alpha(\cos\gamma)$ 28
§ 7. Zusammenfassung 33

Kapitel III. Allgemeine Lösung des Problems durch bestimmte Integrale.

§ 1. Darstellung von $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$ 33
§ 2. Die Potentiale. Sender außerhalb der Erde 34
§ 3. Der Grenzfall des vollkommenen Leiters 36

Kapitel IV. Diskussion der Integrallösung für den Fall vollkommener Leitfähigkeit.

§ 1. Die Funktion $\varphi_\alpha(r, b)$ 36
§ 2. Angenäherte Berechnung des Potentials Π_1
a) Vereinfachung des Integrals 37

Seite

b) Annäherungsformeln für $\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ und $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$. Verlegung des Integrationsweges 38

c) Einführung der Annäherungsformel für $P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$ und Berechnung des resultierenden Integrals 41

§ 3. Zuverlässigkeit der Darstellung von $\varphi_\alpha(r,b)$ durch $-\frac{2i}{k_\alpha}\zeta_\alpha(k_\alpha b)\psi_\alpha(k_\alpha r)$. 43

§ 4. Singularitäten der Funktion $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$

a) Gebiet der Gültigkeit der Formel (93) $|\varrho-\alpha|$ nicht zu klein . . . 52

b) Kleinere Werte von $|\varrho-\alpha|$. Annäherungsausdruck für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ durch $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ 52

c) Das Zwischengebiet 58

§ 5. Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn Nicholson 66

§ 6. Diskussion des Resultates 68

Einleitung und Ergebnisse.

Auf Veranlassung von Herrn Professor Sommerfeld unternahm ich die folgende Untersuchung im Anschluß an seine Arbeit „Über die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie“[1]). In dieser wurde der Fall der Ausbreitung der elektrodynamischen Wellen entlang einer unendlichen Ebene vollständig behandelt und zwar für zwei Medien von beliebigem Material, deren Trennungsfläche die Ebene ist. Ein wichtiges Ergebnis war, daß die unvollkommene Leitfähigkeit des Erdbodens eine neue Form der Wellenausbreitung, den Oberflächentypus, möglich macht.

Die Untersuchung des entsprechenden Problems für die Kugel hat in der letzten Zeit verschiedene Autoren zu verschiedenen Resultaten geführt. Ein zusammenfassender Bericht über den gegenwärtigen Stand des Problems wurde von Herrn J. W. Nicholson gegeben.[2]) Kürzlich haben die Herren Poincaré[3]) und Nicholson[4]) Resultate veröffentlicht, die im wesentlichen miteinander übereinstimmen. Sie finden, daß, unter Voraussetzung einer vollkommen leitenden Erde, die Ergebnisse der praktischen drahtlosen Telegraphie unerklärbar sind, da die Amplitude der Wellen bei der Ausbreitung sehr rasch (nämlich exponentiell) abgedämpft wird. Die Arbeit von Nicholson scheint mir aber nicht mathematisch einwandfrei. (Vgl. S. 66 dieser Arbeit.) Auch der Poincaréschen Arbeit, deren Einzelheiten sich sehr schwer kontrollieren lassen, kann ich in ihren Resultaten nicht beistimmen.

Im Kapitel I wird das elektromagnetische Feld einer vertikalen Antenne durch ein Potential dargestellt, welches als eine Lösung der Differentialgleichung,

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0,$$

unter geeigneten Grenzbedingungen bestimmt, und dann sowohl innerhalb wie außerhalb der Kugel durch Reihen nach Kugelfunktionen aus-

1) Ann. d. Physik 28, 1909. Für eine kurze Zusammenfassung und eine weitere Untersuchung der Zuverlässigkeit der Annahme vollkommener Leitfähigkeit vgl. auch Jahrb. d. drahtlosen Telegraphie 1910.

2) Jahrbuch d. drahtlos. Tel. 1910. 3) Rendiconti Palermo 29, 1910.

4) Phil. Magazine April, July 1910, Jan. 1911.

gedrückt wird. Ein Vergleich mit Poincarés letzter Arbeit zeigt, wie sehr die Einführung des Potentials die Ableitung der Reihen vereinfacht. Diese Reihen, die die Lösung des Problems für eine Kugel von beliebigem Material in einem beliebigen Medium enthalten, stimmen für den Grenzfall unendlicher Leitfähigkeit mit denen von Poincaré und Nicholson überein.

Wegen der Schwierigkeit der Summation der Reihen ist im Kapitel II eine Darstellung einer willkürlichen Funktion durch ein Doppelintegral nach Kugelfunktionen abgeleitet, die es uns ermöglicht, die Lösung des Problems durch Integrale statt durch Reihen auszudrücken und uns deshalb ein Mittel gibt, das Problem sowohl einfacher wie strenger zu lösen. Auf die Möglichkeit und die Wichtigkeit einer solchen Integraldarstellung nach Kugelfunktionen wurde ich vermutungsweise von Herrn Professor Sommerfeld hingewiesen. Es ergibt sich ein Integral, das ähnlich wie die bekannte Legendresche Summenformel,

$$f(\theta) = \sum_0^\infty (n + \tfrac{1}{2}) P_n(\cos\theta) \int_0^\pi f(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma,$$

aussieht, nur daß das Summationszeichen durch ein Integralzeichen ersetzt ist und statt der Kugelfunktion $P_n(\cos\gamma)$ eine Funktion $S_n(\cos\gamma)$ vorkommt, die sehr nahe verwandt mit der Kugelfunktion ist, nämlich:

$$f(\theta) = \int_0^\infty \alpha \, d\alpha \, P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta) \int_0^\pi f(\gamma) S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma.$$

Im Kapitel III wird die gefundene Integraldarstellung benutzt, um die Potentiale in den verschiedenen Gebieten des Feldes durch Integrale darzustellen, insbesondere für den Grenzfall unendlicher Leitfähigkeit mit Sender und Empfänger auf der Erdoberfläche. Für nicht zu kleine Entfernungen wird der Integralausdruck für den Fall des vollkommenen Leiters in Kapitel IV durch eine Annäherungsformel dargestellt. Dabei waren außer der bekannten Annäherungsformel für die Kugelfunktion, namentlich die von Herrn P. Debye[1]) abgeleiteten asymptotischen Darstellungen der Zylinderfunktionen bei großem Argument zu benutzen.

Für die Anwendung dieser Formeln ist es bequem, den Integrationsweg, der ursprünglich die reelle α-Achse war, zu verlegen und einen Halbkreis oberhalb der Achse zu benutzen. Nun ist es mir nicht ge-

1) Math. Ann. 67, S. 535, 1909. Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss., München 1910.

lungen, auf mathematischem Wege vollständig zu beweisen, daß im ganzen Innern des Halbkreises keine Singularitäten des Integranden vorhanden sind. Aber es wird gezeigt, daß, wenn Singularitäten in dem nicht untersuchten Gebiete des Halbkreises existierten, sie einen exponentiellen Zuwachs des Feldes mit zunehmendem Abstand vom Sender bedingen würden. Ihre Existenz ist also aus physikalischen Gründen auszuschließen, wie es übrigens in etwas anderer Form bei Poincaré und Nicholson geschieht.

Der so gefundene Ausdruck für das Potential stimmt nicht mit den Resultaten von Poincaré und Nicholson überein. Er zeigt keineswegs eine exponentielle Abdämpfung mit dem Abstand vom Sender, sondern nur eine durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\theta \sin \theta}}$ bedingte, wo θ der Winkelabstand des Beobachtungsortes vom Sender ist. Dadurch kommt ein Oberflächenwellencharakter der Ausbreitung in unserer Formel klar zum Ausdruck. Es scheint daher, daß die Erdkrümmung gerade durch diese oberflächenhafte Ausbreitung der Wellen überwunden wird.

Interessant ist auch die Tatsache, daß für Werte von θ etwas größer als $\frac{\pi}{2}$ die Amplitude allmählich steigt. Dies deutet auf die Existenz eines bei oberflächenhafter Ausbreitung zu erwartenden scheinbaren Gegenpols im Punkte $\theta = \pi$, der von geringerer Intensitätsordnung wie der primäre Senderpol ist.

Der Fall unvollkommener Leitfähigkeit ist noch nicht untersucht worden, obwohl die Integrale für diesen Fall angegeben sind.

Durch diese Untersuchung glauben wir die tatsächlichen Erfolge der drahtlosen Telegraphie in der Überwindung der Erdkrümmung der Hauptsache nach erklärt zu haben.

Kapitel I.

Allgemeine Lösung in Reihen.

§ 1. Die Differentialgleichung des Problems.

Wir schreiben für periodische Zustände mit der Periodenzahl ω in 2π sec. die Maxwellschen Gleichungen für die elektrische und magnetische Feldstärke[1]),

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \Re[E e^{i\omega t}] \\ \mathfrak{H} = \Re[H e^{i\omega t}] \end{cases}$$

1) R bedeutet den reellen Teil der eingeklammerten Größe.

in der Form[1]):

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{i\mu\omega}{c} H = -\operatorname{rot} E \\ \left(\frac{\sigma}{c} + \frac{i\varepsilon\omega}{c}\right) E = \operatorname{rot} H. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(2a)\qquad \beta = \frac{\sigma}{c} + \frac{i\varepsilon\omega}{c}, \quad \gamma = \frac{i\mu\omega}{c}$$

nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$(3)\qquad \begin{cases} \gamma H = -\operatorname{rot} E \\ \beta E = \operatorname{rot} H. \end{cases}$$

Wir führen Kugelkoordinaten r, θ, φ ein und nennen die entsprechenden Komponenten von E: R, T, F und die von H: P, Θ, Φ. Statt (3) haben wir dann die folgenden sechs Komponentengleichungen:

$$(3a)\qquad \begin{cases} \gamma P = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} r \sin\theta F - \frac{\partial}{\partial\varphi} r T\right) \\ \gamma \Theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} R - \frac{\partial}{\partial r} r \sin\theta F\right) \\ \gamma \Phi = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r T - \frac{\partial}{\partial\theta} R\right) \end{cases}$$

$$(3b)\qquad \begin{cases} \beta R = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} r \sin\theta \Phi - \frac{\partial}{\partial\varphi} r \Theta\right) \\ \beta T = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} P - \frac{\partial}{\partial r} r \sin\theta \Phi\right) \\ \beta F = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r \Theta - \frac{\partial}{\partial\theta} P\right). \end{cases}$$

Nun betrachten wir einen Sender S (Fig. 1) im Abstande b von dem Mittelpunkte einer homogenen Kugel aus beliebigem Material und vom Radius a. Zuerst setzen wir voraus, daß $b > a$ ist. Wir nehmen eine vertikale Antenne in S, die wir als einen schwingenden Dipol auffassen. Aus der Symmetrie des Feldes folgt, daß die φ-Komponente F der elektrischen Feldstärke E verschwindet. Auch daß für alle Komponenten $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$. Daraus folgt nach (3a), daß $P = 0$, $\Theta = 0$ sind. Statt der Gleichungen (3a) und (3b) haben wir dann:

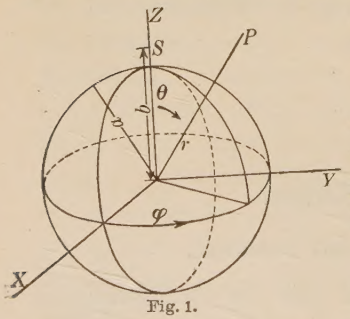

Fig. 1.

$$(4a)\qquad F = 0, \quad P = 0, \quad \Theta = 0,$$

1) Hierin legen wir rationelle Heavisidesche Einheiten zugrunde. μ bedeutet die Permeabilität, ε die Dielektrizitätskonstante, σ die Leitfähigkeit, c die Lichtgeschwindigkeit.

$$(4b)\qquad \begin{cases} \gamma\Phi = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} rT - \frac{\partial}{\partial\theta} R\right) \\ \beta R = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,\Phi \\ \beta T = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\Phi. \end{cases}$$

Wir setzen mit P. Debye[1]), dem wir auch in der Wahl der Bezeichnung R, F, T usw. gefolgt sind:

$$(5)\qquad \Phi = \beta\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}.$$

Dann hat man:

$$(6)\qquad \begin{cases} R = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} \\ T = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\Pi}{\partial r\partial\theta}. \end{cases}$$

(5) und (6) in die erste Gleichung (4b) eingesetzt, ergibt:

$$\beta\gamma\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial^3 r\Pi}{\partial^2 r\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}.$$

Oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta\Pi + k^2\Pi) = 0,$$

wo

$$\Delta\Pi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}$$

den üblichen Laplaceschen Differentialparameter bedeutet und

$$(7)\qquad k^2 = -\beta\gamma = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - \frac{i\mu\sigma\omega}{c^2}$$

ist. In Übereinstimmung hiermit werden wir Π durch die Differentialgleichung bestimmen:

$$(8)\qquad \Delta\Pi + k^2\Pi = 0.$$

Durch die Indices i, a bezeichnen wir, daß die betreffende Größe innerhalb oder außerhalb der Kugel zu nehmen ist. Dann haben wir statt (8) die Differentialgleichungen für das innere und für das äußere Gebiet zu schreiben:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta\Pi + k_i^2\Pi = 0 \\ \Delta\Pi + k_a^2\Pi = 0. \end{cases}$$

Die Feldkomponenten Φ, R, T sind bestimmt, wenn diese Gleichungen unter geeigneten Randbedingungen gelöst sind. Aus der Stetigkeit der

---

1) „Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material". Annalen d. Physik 30, 1909, S. 62. Wir bemerken auch, daß von den zwei Potentialen, die bei Debye vorkommen, eines, Π_2, in unserem Falle wegen der Symmetrie verschwindet.

tangentiellen Komponenten an der Trennungsfläche zweier Medien finden wir die Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} T_i &= T_a \\ \Phi_i &= \Phi_a \end{aligned}\right\} \quad r = a. \tag{10}$$

Die Lösung der Gleichung (8), die einer punktförmigen Energiequelle entspricht, lautet:

$$\Pi = \frac{e^{-ikR}}{R}, \tag{11}$$

wo R der Abstand von der Erregungsstelle ist. Durch solch eine punktförmige Quelle, einen Hertzschen Dipol, denken wir uns den Sender schematisch dargestellt wie in der Sommerfeldschen Arbeit.[1]) Gleichung (11) gibt dann das Potential des primären Feldes, d. h. des Feldes eines Senders in einem homogenen Medium. Im Falle eines Senders außerhalb einer Kugel denken wir uns das ganze Feld als die Summe von einem solchen primären Feld und einem „Streufeld", dessen Potential als eine Summe von partikulären Lösungen von (9) dargestellt werden kann.

Um diese partikulären Lösungen zu finden, setzen wir in (9)

$$\Pi = f(r)F(\theta). \tag{12}$$

Wir erhalten für die Funktionen, f und F, die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2(rf)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) rf = 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dF}{d\theta} + n(n+1)F = 0. \tag{14}$$

Eine Lösung von (14) ist $P_n(\cos\theta)$, die Legendresche Kugelfunktion $n$ter Ordnung. Wenn wir in (13) $\varrho = kr$, $z = \sqrt{\varrho} f$ setzen, erhalten wir die Besselsche Gleichung:

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dz}{d\varrho} + \left(1 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{\varrho^2}\right) z = 0.$$

Deshalb ist:

$$z = \text{Const. } C_{n+\frac{1}{2}}(\varrho),$$

wo $C_{n+\frac{1}{2}}$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $n+\frac{1}{2}$ ist. Dann ist:

$$f = \text{Const. } (kr)^{-\frac{1}{2}} C_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Wir definieren mit P. Debye[2]):

$$\psi_n(kr) = rf = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \tag{15}$$

1) a. a. O. S. 679.

2) Ann. d. Phys. 30, 1909, S. 65.

wo $J_{n+\frac{1}{2}}$ die gewöhnliche Besselsche Funktion ist; und

$$\xi_n(kr) = rf = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr), \tag{16}$$

wo $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}$ die zweite Hankelsche Funktion ist. Der Zusammenhang dieser Funktion mit den Besselschen Funktionen ist durch die folgende Formel[1]) gegeben:

$$H^{(2)}_{\alpha}(x) = -\frac{i}{\sin \alpha\pi}\left(e^{i\alpha\pi} J_{\alpha}(x) - J_{-\alpha}(x)\right).$$

$\psi_n(kr)$ verschwindet für $r=0$, $n > -\frac{1}{2}$, während $\xi_n(kr)$ im Unendlichen der negativ imaginären Halbebene des Arguments exponentiell verschwindet. Da wir stets den Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ in Gedanken zu ergänzen haben, stellt $\xi_n(kr)$ nach dem Unendlichen forteilende Wellen dar. Als partikuläre Lösungen von (9) haben wir dann, entsprechend der Gleichung (12), die zwei Produkte,

$$\begin{cases} \dfrac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos\theta), \\ \dfrac{\xi_n(kr)}{r} P_n(\cos\theta). \end{cases} \tag{17}$$

§ 2. Ansätze für das Potential in den verschiedenen Gebieten.

Mit dem Sender im Abstand b vom Kugelmittelpunkt ($b > a$, a = Kugelradius) werden wir das Potential im Aufpunkte P (Fig. 1) mit den Koordinaten (r, θ) als eine Summe von partikulären Lösungen der Gleichungen (9) darstellen und zwar für die drei Bereiche:

$$(1)\ r > b; \quad (2)\ a < r < b; \quad (3)\ r < a.$$

Die Entwicklungen des Potentials $\frac{e^{-ikR}}{R}$, des primären Feldes, in partikulären Lösungen sind verschieden für die Bereiche (1) und (2), wie wir bald sehen werden. Diese zwei Entwicklungen bezeichnen wir mit:

$$\left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_2.$$

Das Potential des Streufeldes kann durch dieselbe Summe mit unbestimmten Koeffizienten,

$$\sum_0^{\infty n} a_n \frac{\xi_n(k_a r)}{r} P_n(\cos\theta),$$

---

1) Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen S. 17

in (1) und (2) dargestellt werden. In (3) läßt sich das ganze Potential durch

$$\sum_0^\infty{}^n b_n \frac{\psi_n(k_i r)}{r} P_n(\cos\theta)$$

ausdrücken. Dementsprechend setzen wir an:

$$(18)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = \left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_1 + \sum_0^\infty{}^n a_n \frac{\xi_n(k_a r)}{r} P_n(\cos\theta) \\ \Pi_2 = \left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_2 + \sum_0^\infty{}^n a_n \frac{\xi_n(k_a r)}{r} P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = \sum_0^\infty{}^n b_n \frac{\psi_n(k_i r)}{r} P_n(\cos\theta). \end{cases}$$

Daß wir im Gebiete (1) nur die Funktion ξ_n, in (3) nur die Funktion ψ_n ansetzen, ist dadurch notwendig gegeben, daß im Unendlichen von (1) die Wellen von fortschreitendem Charakter sein müssen und daß im Punkte $r = 0$ des Gebietes (3) keine Unendlichkeit vorkommen darf. Daß wir im Gebiete (2) mit demselben Ansatz wie in (1) rechnen, d. h. dieselben Koeffizienten a_n benutzen und keine Glieder mit ψ_n hinzufügen, wird durch die Stetigkeit des Feldes an der Grenze zwischen (2) und (1) gefordert. Die Koeffizienten a_n und b_n sind aus den Bedingungen (10) zu bestimmen.

Zunächhst haben wir $\frac{e^{-ik_a R}}{R}$ in eine Reihe nach Kugelfunktionen zu entwickeln. Nach einer bekannten Formel[1]) ist:

$$\frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x),$$

wo $H^{(2)}_{\frac{1}{2}} x$ die zweite Hankelsche Zylinderfunktion mit dem Index $\frac{1}{2}$ ist. Dann ist:

$$(18a)\qquad \frac{e^{-ikR}}{kR} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{kR}} H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(kR).$$

R ist der Abstand zwischen Sender und Aufpunkt. Also

$$R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}.$$

Dann läßt sich die rechte Seite von (18a) für den Fall $r > b$ in die folgende Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln[2]):

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{kb}\sqrt{kr}} \sum_0^\infty{}^n (n + \tfrac{1}{2}) J_{n+\frac{1}{2}}(kb) H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos\theta).$$

---

1) Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen S. 18.

2) Nielsen a. a. O. S. 280 Gl. (3) $\nu = \frac{1}{2}$.

In ψ_n und ξ_n ausgedrückt (vgl. (15) und (16)) wird dies:

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = -2i\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\,\frac{\psi_n(kb)}{kb}\,\frac{\xi_n(kr)}{kr}\,P_n(\cos\theta).$$

Dies ist die Entwicklung für den Bereich (1), $r > b$. Durch Vertauschung von r und b erhält man die entsprechende Entwicklung für den Bereich (2), $r < b$:

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = -2i\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\,\frac{\xi_n(kb)}{kb}\,\frac{\psi_n(kr)}{kr}\,P_n(\cos\theta).$$

Diese zwei Reihen werden wir in der Form schreiben:

$$(19)\qquad \left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)_1 = \sum_0^\infty c_n\,\frac{\xi_n(kr)}{r}\,P_n(\cos\theta);\quad c_n = -\frac{2i}{k}\,(n+\tfrac{1}{2})\,\frac{\psi_n(kb)}{b}.$$

$$(20)\qquad \left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)_2 = \sum_0^\infty d_n\,\frac{\psi_n(kr)}{r}\,P_n(\cos\theta);\quad d_n = -\frac{2i}{k}\,(n+\tfrac{1}{2})\,\frac{\xi_n(kb)}{b}.$$

In (19) ist $r > b$, in (20) $r < b$ vorausgesetzt.

Die Bedingungen (10) fordern:

$$\left.\begin{aligned}\beta_i\frac{\partial \Pi_3}{\partial\theta} &= \beta_a\frac{\partial \Pi_2}{\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 r\,\Pi_3}{\partial r\,\partial\theta} &= \frac{\partial^2 r\,\Pi_2}{\partial r\,\partial\theta}\end{aligned}\right\}\quad r = a.$$

Diese Bedingungen sind erfüllt wenn:

$$(21)\qquad \left.\begin{aligned}\beta_i\,\Pi_3 &= \beta_a\,\Pi_2\\ \frac{\partial r\,\Pi_3}{\partial r} &= \frac{\partial r\,\Pi_2}{\partial r}\end{aligned}\right\}\quad r = a$$

§ 3. Koeffizientenbestimmung. Sender außerhalb der Erde.

Nachdem man nun die Reihe (20) für $\left(\frac{e^{-ik_aR}}{R}\right)_2$ in den Ausdruck für Π_2 in (18) eingeführt hat, erhält man durch Anwendung von (21) und durch Vergleichung der Koeffizienten von $P_n(\cos\theta)$, die folgenden zwei Gleichungen für a_n und b_n:

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned}&\beta_i\psi_n(k_ia)b_n - \beta_a\xi_n(k_aa)a_n = \beta_a\psi_n(k_aa)d_n\\ &k_i\psi_n'(k_ia)b_n - k_a\xi_n'(k_aa)a_n = k_a\psi_n'(k_aa)d_n.\end{aligned}\right.$$

Folglich:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}a_n &= \frac{\beta_ak_i\psi_n(k_aa)\psi_n'(k_ia) - \beta_ik_a\psi_n'(k_aa)\psi_n(k_ia)}{\beta_ik_a\psi_n(k_ia)\xi_n'(k_aa) - \beta_ak_i\psi_n'(k_ia)\xi_n(k_aa)}\,d_n\\ b_n &= \beta_ak_a\,\frac{\psi_n(k_aa)\xi_n'(k_aa) - \psi_n'(k_aa)\xi_n(k_aa)}{\beta_ik_a\psi_n(k_ia)\xi_n'(k_aa) - \beta_ak_i\psi_n'(k_ia)\xi_n(k_aa)}\,d_n.\end{aligned}\right.$$

Wir können den Zähler in dem letzten Ausdruck vereinfachen, indem wir bemerken, daß $\psi_n(k_a r)$ und $\xi_n(k_a r)$ Lösungen der Differentialgleichung (12) sind. Nach einem bekannten Verfahren folgt:

$$\psi_n(k_a r)\xi_n'(k_a r) - \psi_n'(k_a r)\xi_n(k_a r) = \text{Const.}$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\psi_n(k_a r)\xi_n'(k_a r) - \psi_n'(k_a r)\xi_n(k_a r) = -i. \tag{24}$$

Dann ist b_n einfach:

$$b_n = -i\frac{\beta_a k_a}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} d_n.$$

Wir setzen die Werte von a_n und b_n in (18) ein, schreiben für $\left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_1$ und $\left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_2$ die Reihen (19) und (20) und finden für die Potentiale Π_1, Π_2, Π_3 die Reihen:

$$(25)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \\ -\frac{2i}{k_a b r}\sum_0^\infty n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\psi_n(k_a b) + \frac{\beta_a k_i \psi_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - \beta_i k_a \psi_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)}\xi_n(k_a b)\right\}\xi_n(k_a r)P_n(\cos\theta) \\ \Pi_2 = \\ -\frac{2i}{k_a b r}\sum_0^\infty n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\psi_n(k_a r) + \frac{\beta_a k_i \psi_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - \beta_i k_a \psi_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)}\xi_n(k_a r)\right\}\xi_n(k_a b)P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = \\ -\frac{2\beta_a}{b r}\sum_0^\infty n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)}\xi_n(k_a b)\psi_n(k_i r)P_n(\cos\theta). \end{cases}$$

§ 4. Betrachtung der Grenzfälle.

Im Grenzfalle $b = a$, d. h. im Falle eines Senders auf der Kugeloberfläche, hat man in Π_3 nur a statt b zu schreiben. Nach Anwendung von (24) reduziert sich die Reihe für Π_1 in demselben Falle auf:

$$\Pi_1 = -\frac{2\beta_i}{a r}\sum_0^\infty n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)}\xi_n(k_a r)P_n(\cos\theta). \tag{26}$$

Die Reihen (25) und (26) stellen die Potentiale für eine Kugel von beliebigem Material dar. Aus diesen Formeln können wir leicht die entsprechenden Reihen für den Fall eines vollkommenen Leiters ableiten. Wir haben nur den Limes $\sigma_i = \infty$ auf den rechten Seiten zu nehmen. σ_i kommt in β_i und k_i vor. (Vgl. § 1, Gl. (2a) und Gl. (7)). Um den Grenzübergang zu machen, schreiben wir den in (23) definierten Koeffizienten a_n, der auch in der Klammer in (25) vorkommt, in der Form:

$$a_n = \frac{\beta_a \frac{k_i}{\beta_i} \psi_n(k_a a) \frac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)} - k_a \psi_n'(k_a a)}{k_a \zeta_n'(k_a a) - \beta_a \frac{k_i}{\beta_i} \frac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)} \zeta_n(k_a a)} d_n.$$

Nun ist $\lim_{\sigma_i = \infty} \frac{k_i}{\beta_i} = 0$. Weiter bleibt der Quotient $\frac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}$ endlich für unendlich wachsendes komplexes Argument. Folglich ist:

$$\lim_{\sigma_i = \infty} a_n = - \frac{\psi_n'(k_a a)}{\zeta_n'(k_a a)} d_n;$$

Man sieht sofort, daß

$$\lim_{\sigma_i = \infty} b_n = 0.$$

Dann nehmen die Reihen für den Grenzfall $\sigma_i = \infty$, d. h. für den vollkommenen Leiter, die einfacheren Formen an:

$$(27) \quad \begin{cases} \Pi_1 = - \frac{2i}{k_a b r} \sum_0^\infty n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \psi_n(k_a b) - \frac{\psi_n'(k_a a)}{\zeta_n'(k_a a)} \zeta_n(k_a b) \right\} \zeta_n(k_a r) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_2 = - \frac{2i}{k_a b r} \sum_0^\infty n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \psi_n(k_a r) - \frac{\psi_n'(k_a a)}{\zeta_n'(k_a a)} \zeta_n(k_a r) \right\} \zeta_n(k_a b) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = 0. \end{cases}$$

In der Grenze $b = a$ nimmt die Reihe für Π_1 in (27) nach Anwendung von (24) die noch einfachere Form an:

$$(28) \qquad \Pi_1 = - \frac{2}{k_a a r} \sum_0^\infty n \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\zeta_n(k_a r)}{\zeta_n'(k_a r)} P_n(\cos\theta).$$

Denselben Grenzwert für $b = a$, $\sigma_i = \infty$ findet man für Π_1 aus (26), d. h. der Grenzwert (28) ist unabhängig von der Reihenfolge der Grenzübergänge.

§ 5. Sender innerhalb der Erde.

Um den Grenzübergang $b = a$ zu prüfen, wollen wir noch den Sender in die Kugel in dem Abstand b vom Mittelpunkte setzen. Wie vorher werden wir die Potentiale für drei Bereiche aufstellen und dann zur Grenze $b = a$ übergehen. Wir werden finden, daß die Potentiale mit den vorhergehenden übereinstimmen.

Die drei Bereiche seien:

$$(1),\ r > a; \quad (2),\ b < r < a; \quad (3),\ r < b.$$

Wir setzen an (vgl. vorigen Fall):

$$(29)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = \sum_0^\infty a_n' \frac{\xi_n(k_a r)}{r} P_n(\cos\theta) \\ \Pi_2 = \left(\frac{e^{-ik_i R}}{R}\right)_2 + \sum_0^\infty b_n' \frac{\psi_n(k_i r)}{r} P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = \left(\frac{e^{-ik_i R}}{R}\right)_3 + \sum_0^\infty b_n' \frac{\psi_n(k_i r)}{r} P_n(\cos\theta). \end{cases}$$

Wie im vorigen Falle lassen sich die Koeffizienten a_n' und b_n' aus (21) bestimmen. Es sind:

$$(30)\qquad \begin{cases} a_n' = -i \frac{\beta_i k_i}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} c_n' \\ b_n' = \frac{\beta_a k_i \xi_n(k_a a)\xi_n'(k_i a) - \beta_i k_a \xi_n'(k_a a)\xi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} c_n', \end{cases}$$

wo

$$c_n' = -\frac{2i}{k_i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_n(k_i b)}{b}$$

ist.

Folglich:

$$(31)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = \\ -\frac{2\beta_i}{br}\sum_0^\infty \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_n(k_i b)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} \xi_n(k_a r) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_2 = \\ -\frac{2i}{k_i br}\sum_0^\infty \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\xi_n(k_i r) + \frac{\beta_a k_i \xi_n(k_a a)\xi_n'(k_i a) - \beta_i k_a \xi_n'(k_a a)\xi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} \psi_n(k_i r)\right\}\psi_n(k_i b) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = \\ -\frac{2i}{k_i br}\sum_0^\infty \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\xi_n(k_i b) + \frac{\beta_a k_i \xi_n(k_a a)\xi_n'(k_i a) - \beta_i k_a \xi_n'(k_a a)\xi_n(k_i a)}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} \psi_n(k_i b)\right\}\psi_n(k_i r) P_n(\cos\theta). \end{cases}$$

In der Grenze $b = a$ hat man:

$$(32)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = -\frac{2\beta_i}{ar}\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{1}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} \psi_n(k_i a)\xi_n(k_a r) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = -\frac{2\beta_a}{ar}\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{1}{\beta_i k_a \psi_n(k_i a)\xi_n'(k_a a) - \beta_a k_i \psi_n'(k_i a)\xi_n(k_a a)} \xi_n(k_a a)\psi_n(k_i r) P_n(\cos\theta). \end{cases}$$

Diese Reihen stimmen mit (26) und Π_3 in (25) überein, wenn man in der letzteren b durch a ersetzt. Der Grenzwert für $b = a$ ist dann derselbe, ob man den Sender ursprünglich innerhalb oder außerhalb der Erde annimmt.

Die Reihen für Π_1 und Π_2 in (25) und ebenso die für Π_2 und Π_3 in (31) zeigen uns, daß das Potential in einem Punkt P mit den

Koordinaten (r, θ) entsprechend einem Sender in S mit den Koordinaten $(b, 0)$ gleich ist dem Potential in S entsprechend einem Sender derselben Stärke in P. Diese Vertauschbarkeit von Quelle und Aufpunkt ist eine bekannte Folge des Greenschen Satzes.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir die Reihen, die wir aufgestellt haben, mit denen für den Grenzfall unendlicher Leitfähigkeit vergleichen, die Poincaré[1]) und Nicholson[2]) in ihren Lösungen benutzen.

§ 6. Vergleich mit Poincaré.

Poincaré leitet eine Reihe ab, die die elektrische Dichte auf der Kugeloberfläche gibt. Sie lautet[3]) in seiner Bezeichnungsweise:

$$\mu = -\frac{i}{4\pi\omega^2}\frac{1}{\varrho^2 D^2}\sum_0^\infty n(n+1)(2n+1)\frac{I_n(\omega D)}{I_n'(\omega\varrho)}P_n(\cos\varphi).$$

In unseren Bezeichnungen ist I_n, abgesehen von einem konstanten Faktor, gleich ξ_n, $\omega = k$, $D = b$, $\varrho = a$, $\varphi = \theta$. Die Formel gilt für den Fall $b > a$ d. h. der Sender ist außerhalb der Kugel. Diese ist als ein vollkommener Leiter gedacht.

Nun ist die elektrische Dichte auf der Oberfläche eines Leiters, abgesehen von einem konstanten Faktor, gleich der elektrischen Kraft an der Oberfläche. Deshalb in unserer Schreibweise ist:

$$\mu = \text{Const.}\,(R)_{r=a}, \quad b > a.$$

R, die normale Komponente der elektrischen Kraft, ist gegeben durch

$$R = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Pi_2}{d\theta}$$

für $a < r < b$ (vgl. Gl. (6) und § 2) und auch, wie man sich leicht überzeugen kann, für den Grenzfall $r = a$ d. h. für einen Aufpunkt auf der Kugeloberfläche selbst. Der Wert für Π_2 für den Fall unendlicher Leitfähigkeit ist in (27) gegeben. Wir setzen $r = a$ und wenden (24) an. Dann wird:

$$(\Pi_2)_{r=a} = -\frac{2}{k_a b a}\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{\xi_n(k_a b)}{\xi_n'(k_a a)}P_n(\cos\theta).$$

Daraus folgt:

$$(33)\qquad (R)_{r=a} = -\frac{2}{k_a b a^2}\sum_0^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{\xi_n(k_a b)}{\xi_n'(k_a a)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}.$$

1) Rendiconti Palermo 29, 1910. 2) Phil. Magazine April 1910.
3) l. c. p. 240.

Nach Benutzung der Gleichung (14), der Differentialgleichung der Kugelfunktion, reduziert sich (33) auf:

$$(34) \qquad (R)_{r=a} = \frac{1}{k_a b a^2} \sum_0^\infty (2n+1) n(n+1) \frac{\zeta_n(k_a b)}{\zeta_n'(k_a a)} P_n(\cos\theta).$$

Abgesehen von konstanten Faktoren stimmt diese Reihe mit Poincarés Ausdruck für μ überein:

Beim Vergleich unserer Ableitung mit derjenigen Poincarés erkennt man, wie sehr sich die Rechnungen durch Einführung des Potentials Π vereinfachen.

§ 7. Vergleich mit Nicholson.

Herr Nicholson gibt den folgenden Ausdruck für γ, die magnetische Kraft in einem Punkt auf der Erdoberfläche in dem Fall, daß auch der Sender auf der Oberfläche der vollkommen leitenden Erde liegt.[1])

$$(35) \qquad \gamma\varrho = \frac{i \sin^2\theta}{k a^2} \sum_1^\infty (n+\tfrac{1}{2}) R_n (1 + e^{2i\chi_n}) \frac{dP_n}{d\mu}$$

wo $\varrho = a \sin\theta$ und $\mu = \cos\theta$ sind. Zum Zweck eines Vergleichs drücken wir dies in unserer Bezeichnung aus. Nach (12) S. 522 ist:

$$(36) \qquad \frac{z^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z)}{\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z)\right)} = \frac{i}{k} \frac{R_n}{2} (1 + e^{2i\chi_n}), \quad z = ka.$$

Eine leichte Überlegung zeigt, daß die durch Gl. (4) S. 519 definierte Funktion $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ gleich $\frac{\pi}{2} e^{-i\left(n+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$ ist.[2])

Folglich ist:

$$z^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \text{Const. } \zeta_n(z).$$

Es folgt:

$$\frac{z^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z)}{\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z)\right)} = \frac{\zeta_n(z)}{\zeta_n'(z)}.$$

Nach (36) ist dann:

$$R_n(1 + e^{2i\chi_n}) = \frac{2k}{i} \frac{\zeta_n(z)}{\zeta_n'(z)}.$$

Dies in (35) eingesetzt ergibt:

1) Phil. Magazine Apr. 1910 p. 523 Gl. (17).
2) Vgl. Nielsen l. c. p. 17.

$$\gamma = -\frac{2}{a^3}\sum_1^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{\xi_n(z)}{\xi_n'(z)}\frac{dP_n}{d\theta}, \quad (z = ka). \tag{37}$$

Hier haben wir ϱ und μ durch ihre Definitionen in θ ausgedrückt.

Aus unserer Reihe (28) finden wir den Ausdruck für die magnetische Kraft Φ, indem wir $\beta_a \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta}$ bilden und $r = a$ setzen. Wir finden:

$$\Phi = -\frac{2\beta_a}{k_a a^2}\sum_1^\infty (n+\tfrac{1}{2})\frac{\xi_n(k_a a)}{\xi_n'(k_a a)}\frac{dP_n}{d\theta}. \tag{38}$$

Also, abgesehen von konstanten Faktoren, auf die es natürlich nicht ankommt, stimmen die zwei Reihen überein.

§ 8. Bemerkung über die Lösung durch Reihen.

Obwohl die Einführung des Potentials die Rechnungen sehr vereinfacht, und uns die vollständige Lösung unseres Problems nicht nur für eine vollkommen leitende Kugel sondern auch für eine homogene Kugel aus beliebigem Material in einer verhältnismäßig einfachen und übersichtlichen Weise liefert, bietet die Diskussion dieser Lösung große Schwierigkeiten dar. Diese entstehen daraus, daß unsere Reihen sehr langsam konvergieren. Wie schon aus den verschiedenen Untersuchungen in diesem Gebiete bekannt ist, liefern die Glieder, deren Indizes, n, nahe gleich dem Argument der in den Koeffizienten auftretenden Zylinderfunktionen sind, einen wesentlichen Teil der Summe der Reihen. Für den Fall, daß die Erde als vollkommen leitend gedacht wird und die Wellenlänge 2 km beträgt, wird dieses Argument von der Ordnung 2.10^4. Um die großen Schwierigkeiten, die mit der Summation solcher Reihen selbst in dem ziemlich einfach aussehenden Falle der Reihe (28) verbunden sind, zu vermeiden, greifen wir das Problem von einem neuen Standpunkt an, indem wir suchen, unsere Lösungen durch Integrale statt durch Reihen auszudrücken.

Kapitel II.

Darstellung einer willkürlichen Funktion auf der Kugel durch ein Doppelintegral mit Kugelfunktionen.

Um die Lösungen der Gleichung (9) in Integralform zu erhalten, muß man zunächst die Integraldarstellung einer einfachen Lösung, der primären Erregung $\frac{e^{-ikR}}{R}$, nach Kugelfunktionen wissen. Nachdem man

diese Darstellung hat, ist es leicht, geeignete Ansätze für Integrale zu machen, welche die Potentiale in den verschiedenen Gebieten darstellen. Die Ableitung der gesuchten Integraldarstellung von $\frac{e^{-ikR}}{R}$ ist ein spezieller Fall des allgemeinen Problems, eine willkürliche Funktion einer Variablen θ durch ein Integral mit Kugelfunktionen darzustellen. Die Lösung dieses Problems ist der Zweck der folgenden Paragraphen.

§ 1. Lösung einer vorbereitenden Integralgleichung bei analytischem Charakter von ψ.

Sei $f(\theta)$ die darzustellende Funktion, die wir auch gleich $\psi(\cos\theta)$ schreiben werden. Wir setzen an:

$$f(\theta) = \int_0^\theta \frac{F(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}} \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi. \tag{38}$$

und erhalten so eine Integralgleichung zur Bestimmung von $F(\varphi)$. Dann stellen wir $F(\varphi)\sin\varphi$ durch ein Fouriersches Doppelintegral dar und benutzen in dem resultierenden Ausdruck nach Vertauschung der Integrationsfolge, das Mehler-Dirichletsche Integral[1]) für die Legendresche Funktion erster Art,

$$P_\alpha(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2})\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die gesuchte Darstellung folgt hieraus nach einfachen Umformungen.

Der Einfachheit halber setzen wir zunächst voraus, daß $\psi(x)$, $(f(\theta) = \psi(\cos\theta))$, in der Umgebung der Linie zwischen $x = -1$ und $x = 1$ analytisch ist. In (38) setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta = x, \qquad \cos\varphi = \xi, \\ &f(\theta) = \psi(x), \quad F(\varphi) = u(\xi), \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &0 \leqq \theta \leqq \pi \\ &0 \leqq \varphi \leqq \pi. \end{aligned}$$

Hierdurch wird (38):

$$\psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^x \frac{u(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^{\frac{1}{2}}}. \tag{39}$$

Dies ist ein spezieller Fall der Integralgleichung,

$$\psi(x) = \int_a^x \frac{u(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^\lambda}, \qquad \begin{cases} 0 < \lambda < 1 \\ a \leqq x \leqq b,\ a \text{ und } b \text{ endlich}, \end{cases} \tag{40}$$

1) Vgl. z. B. Whittaker, Modern Analysis S. 219.

die man die Abelsche Gleichung nennt. Bôcher[1]) gibt eine Ableitung der Lösung dieser Gleichung, die im wesentlichen von Liouville, augenscheinlich ohne Kenntnis der Abelschen Arbeiten, gefunden worden ist. Demselben Gedankengang folgen wir in der Lösung von (39), nur daß wir von dem vorausgesetzten analytischen Charakter der Funktion ψ Gebrauch machen und an gewissen Stellen ein Integral über einen komplexen Weg einführen.

Wir nehmen an, daß eine Lösung $u(z)$ der Gleichung (39) existiert, die im Intervall $(-1, 1)$ mit Ausnahme des Punktes $z = 1$ stetig ist. In $z = 1$ soll $u(z)$, wenn in diesem Punkte eine Unstetigkeit vorliegt, sich wie $\frac{\varphi(z)}{(1-z)^{\lambda}}$ verhalten, wo $\varphi(z)$ endlich und stetig in $z = 1$ ist und $0 < \lambda < 1$ ist.

Wir multiplizieren (39) mit $(x-z)^{-\frac{1}{2}}dx$ und integrieren von 1 bis z, $-1 \leqq z \leqq 1$. Es ergibt sich:

$$\int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^z \frac{dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}} \int_1^x \frac{u(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von u ist es erlaubt, die Integrationsfolge auf der rechten Seite zu vertauschen.[2])

Dann hat man:

$$\int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^z u(\xi)\,d\xi \int_\xi^z \frac{dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}(\xi-x)^{\frac{1}{2}}}. \tag{41}$$

Bekanntlich ist:

$$\int_\xi^z \frac{dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}(\xi-x)^{\frac{1}{2}}} = -\pi. \tag{41a}$$

Dies sieht man sofort, wenn man (41a) als ein geschlossenes Integral um die Verzweigungspunkte z, ξ auffaßt und den Integrationsweg auf den unendlich fernen Punkt zusammenzieht.

Folglich wird (41):

$$\int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_1^z u(\xi)\,d\xi. \tag{42}$$

Im ganzen Intervall $(-1, 1)$ mit Ausnahme des Punktes 1, ist dann:

$$u(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}. \qquad -1 \leqq z < 1. \tag{43}$$

1) Bôcher: Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge 1909 S. 6—11.

2) Bôcher a. a. O. S. 4. Dirichlets Extended Formula.

§ 2. Einführung komplexer Integrationswege und Erledigung des Punktes $z = 1$.

Nun ersetzen wir das Integral,

$$\int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}},$$

über einen reellen Weg genommen, durch ein Integral, dessen Weg auf der Riemannschen Fläche der Quadratwurzel $\sqrt{x-z}$ läuft, und zwar von dem Punkte $x = 1$ in dem Blatt 1 um den Verzweigungspunkt $x = z$ herum über die Übergangslinie von z nach $-\infty$ in das Blatt 2 und in diesem nach dem Punkte $x = 1$ zurück. Unter Blatt 1 verstehen wir das Blatt der Riemannschen Fläche, auf dem $\sqrt{x-z}$ einen positiv reellen Teil besitzt.[1]) Das andere Blatt nennen wir Blatt 2, und der in ihm verlaufende Teil des Integrationswegs ist in der Fig. 2 punktiert gezeichnet. Ein Integral über diesen Weg genommen schreiben wir

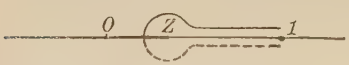

Fig. 2.

$$\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1}.$$

Nach dieser Festsetzung können wir schreiben:

$$\int_1^z \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1} \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}},$$

und es wird (43):

$$u(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1} \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}. \qquad -1 \leqq z < 1$$

Jetzt kann man unter dem Integralzeichen differentiieren. Es ergibt sich:

$$(44) \qquad u(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1} \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{3}{2}}}. \qquad -1 \leqq z < 1$$

Partielle Integration gibt uns:

$$(45) \qquad u(z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{\psi(x)}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}\Big]_{1,1} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1} \frac{\psi'(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{2}}\frac{\psi(1)}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{z\,(\cdots\cdots)\,1} \frac{\psi'(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

1) Diese Definition ist für den Fall $z < 1$ gemeint. Für $z > 1$ ist sie entsprechend zu ändern.

Nach (43) ist $u(z)$ in dem Punkte $z = 1$ nicht definiert. In dem Fall, daß $u(z)$ in $z = 1$ stetig ist, zeigt Gleichung (45), daß dann $\psi(1) = 0$ sein muß, und $u(z)$ ist durch (44) auch für den Punkt $z = 1$ bestimmt. Falls hingegen $u(z)$ im Punkte $z = 1$ unstetig ist, sei sein Verhalten in diesem Punkte durch (44) oder (45) definiert. Wir sehen aus (45), daß die Unstetigkeit in $z = 1$ von der auf S. 21 vorausgesetzten Form ist. Wir schreiben dann als Lösung von (39) im ganzen Intervall $(-1, 1)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi} \int_{z}^{1} \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{\frac{3}{2}}}. \qquad -1 \leqq z \leqq 1 \tag{45a}$$

Daß (45a) wirklich eine Lösung von (39) ist, erkennen wir durch direkte Substitution. Nämlich:

$$\psi(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{(\xi - z)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi}^{1} \frac{\psi(x)\,dx}{(x-\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch teilweise Integration finden wir:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{(\xi - z)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left[\frac{-2\psi(x)}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}} \right]_{1,1} + 2 \int_{\xi}^{1} \frac{\psi'(x)\,dx}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= -\frac{\psi(1)}{\pi} \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{(\xi - z)^{\frac{1}{2}}\,(1-\xi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi} \int_{1}^{z} \frac{d\xi}{(\xi - z)^{\frac{1}{2}}} \int_{1}^{\xi} \frac{\psi'(x)\,dx}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Anwendung von (41a) und Vertauschung der Integrationsfolge ergibt:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \psi(1) - \frac{1}{\pi} \int_{1}^{z} \psi'(x)\,dx \int_{x}^{z} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\,(\xi - z)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \psi(1) + \int_{1}^{z} \psi'(x)\,dx \\ &= \psi(z),\end{aligned}$$

womit der Beweis erbracht ist.

Um zur Lösung der ursprünglichen Gleichung (38) überzugehen, setzen wir in (45a) $z = \cos\varphi$, $x = \cos\gamma$, $u(\cos\varphi) = F(\varphi)$, $\psi(\cos\gamma) = f(\gamma)$ und erhalten:

$$F(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{\varphi}^{0} \frac{f(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\varphi)\}^{\frac{3}{2}}}. \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi \tag{46}$$

Nach einer teilweisen Integration kann man auch schreiben:

$$F(\varphi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \int_{\varphi}^{0} \frac{f'(\gamma)\,d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}} \right]. \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi \tag{46a}$$

§ 3. Hilfssatz betreffend die Umkehrung der Integrationsfolge in gewissen komplexen Integralen.

Bevor wir weitergehen, beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in der Umgebung der Linie zwischen a und b analytisch sind, ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{x\,(\cdots a}^{\cdots} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}} = -\int_a^b \psi(\xi)\,d\xi \int_{\xi\,(\cdots b}^{\cdots} \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Den Beweis führen wir durch teilweise Integration auf einen bekannten Satz für reelle Wege zurück.

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{x\,(\cdots a}^{\cdots} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}} = \int_a^b \varphi(x)\,dx \left\{ \left[\frac{-2\psi(\xi)}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}} \right]_{a,\,a} + 2 \int_{x\,(\cdots a}^{\cdots} \frac{\psi'(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Dies wird nach Einführung des reellen Integrationsweges:

$$(47)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{x\,(\cdots a}^{\cdots} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}} = 4\psi(a) \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}} + 4 \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^x \frac{\psi'(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Das letzte Integral lautet nach Vertauschung der Integrationsfolge[1]):

$$4 \int_a^b \psi'(\xi)\,d\xi \int_\xi^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Teilweise Integration ergibt:

$$\left[4\psi(\xi) \int_\xi^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\xi=a}^{\xi=b} - 4 \int_a^b \psi(\xi)\,d\xi \frac{d}{d\xi} \int_\xi^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dies wird nach Übergang zum komplexen Integrationsweg:

$$-4\psi(a) \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \int_a^b \psi(\xi)\,d\xi \int_{\xi\,(\cdots b}^{\cdots} \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ersetzen wir das zweite Integral auf der rechten Seite von (47) hierdurch, so ergibt sich die gesuchte Formel:

$$(48)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{x\,(\cdots a}^{\cdots} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}} = -\int_a^b \psi(\xi)\,d\xi \int_{\xi\,(\cdots b}^{\cdots} \frac{\varphi(x)\,dx}{(\xi-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

1) Vgl. z. B. Bôcher a. a. O. S. 4.

§ 4. Heranziehen der Fourierschen Integraldarstellung.

Durch die Gleichung (46) ist $F(\varphi)$ nur für das Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gegeben. Außerhalb dieses Intervalles können wir $F(\varphi)$ willkürlich definieren. Wir setzen $F(\varphi) = 0$, $\varphi > \pi$. Dann sieht man sofort aus (46a), daß die Funktion $F(\varphi) \sin \varphi$ sich nicht nur für $\varphi > 0$, sondern auch für $\varphi = 0$ so verhält, daß man sie durch ein Fouriersches Doppelintegral darstellen kann. Also:

$$F(\varphi) \sin \varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \cos \alpha\varphi \int_0^\pi d\beta F(\beta) \sin \beta \cos \alpha\beta.$$

Wir schreiben daher statt (38):

$$(49) \qquad f(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty d\alpha \cos \alpha\varphi \int_0^\pi d\beta F(\beta) \sin \beta \cos \alpha\beta.$$

Jetzt setzen wir die Darstellung von F durch f aus (46) in das letzte Integral in (49) ein und formen den resultierenden Ausdruck um. Die Substitution ergibt:

$$(50) \int_0^\pi d\beta F(\beta) \sin \beta \cos \alpha\beta = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\beta \sin \beta \cos \alpha\beta \int_\beta^0 \frac{f(\gamma) \sin \gamma d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Auf die rechte Seite können wir die Formel (48) des Hilfssatzes anwenden, indem wir in Gedanken $\cos\gamma = \xi$, $\cos\beta = x$ einführen. Es ergibt sich direkt:

$$(51) \int_0^\pi d\beta F(\beta) \sin \beta \cos \alpha\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\gamma) \sin \gamma d\gamma \int_\gamma^\pi \frac{\sin \beta \cos \alpha\beta d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Nachdem man die neue Funktion,

$$(52) \qquad S_\alpha(\cos\gamma) = \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{2})\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\sin\beta \cos(\alpha + \frac{1}{2})\beta d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{3}{2}}},$$

eingeführt hat, nimmt (51) die einfachere Form an:

$$(53) \qquad \int_0^\pi d\beta F(\beta) \sin \beta \cos \alpha\beta = \alpha \int_0^\pi f(\gamma) S_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma.$$

(53) in (49) eingetragen ergibt:

$$(54) \quad f(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \alpha d\alpha \cos \alpha\varphi \int_0^\pi f(\gamma) S_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma.$$

Wenn es erlaubt ist, die Integrationsfolge zu vertauschen, hat man:

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha d\alpha \int_0^\theta \frac{\cos\alpha\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}} \int_0^\pi f(\gamma) S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma.$$

Unter Benutzung der Mehler-Dirichletschen Integraldarstellung[1]),

$$P_\alpha(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}},$$

nimmt dies die Form an:

$$f(\theta) = \int_0^\infty \alpha d\alpha\, P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta) \int_0^\pi f(\gamma) S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma. \tag{55}$$

Tatsächlich ist die Vertauschung der Integrationsfolge erlaubt, wenn das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (55) existiert. (55) ist dann die gesuchte Darstellung. Andernfalls ist (54) die Darstellung für $f(\theta)$.

§ 5.

Verallgemeinerung auf den Fall einer nicht analytischen Funktion $\psi(x)$.

In den vorigen Paragraphen haben wir $\psi(x)$, $(\psi(\cos\theta) = f(\theta))$, als analytisch vorausgesetzt. Jetzt wollen wir dieselbe Darstellung für eine weniger beschränkte Funktion ableiten. Für $\psi(x)$, eine Funktion der reellen Variable x, setzen wir voraus:

1. $\psi(x)$ ist im Intervall $(-1, 1)$ stetig.

2. $\psi(x)$ besitzt in diesem Intervall eine endliche erste Ableitung, die nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten hat.

Wir fangen wie im vorigen Fall mit der Integralgleichung (38) an, die uns sofort die Gleichung

$$\psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^x \frac{u(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^{\frac{1}{2}}}, \qquad -1 \leqq x \leqq 1, \tag{39}$$

liefert. Die Lösung dieser Integralgleichung unter den auf $\psi(x)$ auferlegten Beschränkungen ist[2]):

$$u(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{\frac{\psi(1)}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} + \int_1^z \frac{\psi'(x)\, dx}{(x-z)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \qquad -1 \leqq x \leqq 1. \tag{56}$$

Die entsprechende Gleichung in F und f lautet:

---

1) Vgl. z. B. Whittaker, Modern Analysis S. 219.

2) Bôcher a. a. O. SS. 8—10.

$$(57) \qquad F(\varphi) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \int_0^{\varphi} \frac{f'(\gamma)\,d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}\right\}, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Für $\varphi > \pi$ setzen wir $F(\varphi) = 0$. Dann können wir wie oben $F(\varphi)\sin\varphi$ im Intervall $(0, \infty)$ durch ein Fouriersches Doppelintegral darstellen. Diese Darstellung in

$$(38) \qquad f(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{F(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

eingeführt, ergibt:

$$(58) \qquad f(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} d\alpha\cos\alpha\varphi \int_0^{\pi} d\beta F(\beta)\sin\beta\cos\alpha\beta.$$

Wir formen das letzte Integral in (58) um, nachdem wir $F(\beta)$ aus (57) eingesetzt haben:

$$\int_0^{\pi} d\beta F(\beta)\sin\beta\cos\alpha\beta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\beta\sin\beta\cos\alpha\beta\left[\frac{f(0)}{2\sin\frac{\beta}{2}} + \int_0^{\beta} \frac{f'(\gamma)\,d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}f(0)\int_0^{\pi} d\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\beta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\beta\sin\beta\cos\alpha\beta\int_0^{\beta} \frac{f'(\gamma)\,d\gamma}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Vertauschung der Integrationsfolge ergibt für die rechte Seite:

$$\frac{2}{\pi}f(0)\int_0^{\pi} d\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\beta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(\gamma)\,d\gamma\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Nach partieller Integration wird dies:

$$\frac{2}{\pi}f(0)\int_0^{\pi} d\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\beta + \frac{2}{\pi}f(\gamma)\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\Bigg]_{\gamma=0}^{\gamma=\pi}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\gamma)\,d\gamma\,\frac{d}{d\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\pi}f(0)\int_0^{\pi} d\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\beta$$

$$-\frac{2}{\pi}f(0)\int_0^{\pi} \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\gamma)\,d\gamma\,\frac{d}{d\gamma}\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma - \cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} =$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\gamma)\,d\gamma\,\frac{d}{d\gamma}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\beta\cos\alpha\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Das Resultat läßt sich dann schreiben:

$$(59)\qquad \int_0^\pi d\beta\,F(\beta)\sin\beta\cos\alpha\beta=\alpha\int_0^\pi f(\gamma)\,S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma,$$

wo wir

$$(60)\qquad S_\alpha(\cos\gamma)=-\frac{2}{\pi(\alpha+\frac{1}{2})\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\beta\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

gesetzt haben. Wenn man das Integral in der Definition von $S_\alpha(\cos\gamma)$ über den Weg $\gamma \frown \pi$ in der Riemannschen Fläche (s. oben) nimmt, sieht man sofort, daß diese Definition von $S_\alpha(\cos\gamma)$ mit der in (52) gegebenen übereinstimmt. (59) in (58) eingesetzt ergibt:

$$(61)\ f(\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\{2(\cos\varphi-\cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \alpha\,d\alpha\cos\alpha\varphi\int_0^\pi f(\gamma)\,S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma.$$

Falls Vertauschung der Integrationsfolge erlaubt ist (vgl. vorigen Fall), hat man:

$$(62)\qquad f(\theta)=\int_0^\infty \alpha\,d\alpha\,P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\int_0^\pi f(\gamma)\,S_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma.$$

Dies ist die gesuchte Darstellung und stimmt mit der in (55) gegebenen überein. Die Beschränkungen für $f(\theta)$, unter welchen der Beweis gültig ist, entsprechend denen für $\psi(x)$, sind folgende:

1. $f(\theta)$ soll im Intervall $(0,\pi)$ stetig sein:

2. $\frac{f'(\theta)}{\sin\theta}$ soll in demselben Intervall endlich bleiben und nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten haben.

§ 6. Untersuchung der Funktion $S_\alpha(\cos\gamma)$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion $S_\alpha(\cos\gamma)$, die in der Integraldarstellung (62) oder (55) vorkommt, sehr nahe verwandt ist mit der Legendreschen Funktion erster Art, $P_\alpha(\cos\gamma)$. Nach (52) und (60) ist nämlich:

$$S_\alpha(\cos\gamma)=\frac{1}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi}\int_{\gamma\frown\pi} \frac{\sin\beta\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Teilweise Integration ergibt:

$$S_\alpha(\cos\gamma) = -\frac{1}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi}\cdot\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\Big]_{\pi,\gamma} - \frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Folglich:

$$(63)\qquad S_\alpha(\cos\gamma) = \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\cdot d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Nun ist für ganzzahliges α nach der zweiten Mehler-Dirichletschen Integraldarstellung:

$$P_\alpha(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Im allgemeinen gilt aber die Formel:[1])

$$(64)\quad P_\alpha(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} + \cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+\frac{1}{2})v}\, dv}{\{2(\mathfrak{Cof}\, v+\cos\gamma)\}^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

die sich bei ganzzahligem α auf die vorige reduziert. Wir sehen dann, daß bei ganzzahligem α $S_\alpha(\cos\gamma) = P_\alpha(\cos\gamma)$ ist. Andernfalls stimmen S_α und P_α nicht überein.

Wir werden finden, daß $S_\alpha(\cos\gamma)$ einer Differentialgleichung genügt, welche mit der der Legendreschen Funktionen übereinstimmt, nur daß sie bei nicht ganzzahligem α inhomogen ist. Um diese Differentialgleichung abzuleiten, schreiben wir (63) in der Form:

$$(65)\qquad S_\alpha(\cos\gamma) = \frac{A}{\cos\frac{\gamma}{2}} + H_\alpha(\cos\gamma),$$

wo wir die Abkürzungen:

$$(65a)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi} \\ H_\alpha(\cos\gamma) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\gamma\,(=\pi}^{\pi} \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

benutzt haben.

Erst leiten wir die Differentialgleichung für $H_\alpha(\cos\gamma)$ ab. Dann ist die Differentialgleichung für $S_\alpha(\cos\gamma)$ leicht aus (65) zu erhalten. Die Differentialgleichung für $H_\alpha(\cos\gamma)$ läßt sich am einfachsten aus den Rekursionsformeln dieser Funktion ableiten. Die letzteren werden wir zunächst aufstellen. Zu dem Zwecke bilden wir:

1) Hobson, Philosophical Translations 187A 1896 S. 512.

$$H_{\alpha+1} - \cos\gamma\, H_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{3}{2})\beta - \cos\gamma \sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\, d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_\gamma^\pi \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta}(\cos\beta + i\sin\beta - \cos\gamma) - e^{-i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta}(\cos\beta - i\sin\beta - \cos\gamma)}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\, d\beta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta(\cos\beta-\cos\gamma)\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\beta\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\, d\beta$$

$$+ \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\Big]_\gamma^\pi$$

$$+ 2\,\frac{(\alpha+\frac{1}{2})}{\pi}\int_\gamma^\pi \sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\, d\beta.$$

Schließlich hat man:

$$(66)\qquad H_{\alpha+1} - \cos\gamma\, H_\alpha = \frac{2\alpha}{\pi}\int_\gamma^\pi \sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\, d\beta$$

$$+ \frac{4}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Jetzt bilden wir:

$$\cos\gamma\, H_\alpha - H_{\alpha-1} = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos\gamma\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta - \sin(\alpha-\frac{1}{2})\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\, d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_\gamma^\pi \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta}(\cos\gamma-\cos\beta+i\sin\beta) - e^{-i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta}(\cos\gamma-\cos\beta-i\sin\beta)}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}\, d\beta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta(\cos\gamma-\cos\beta)\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\beta\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\, d\beta$$

$$+ \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}\Big]_\gamma^\pi$$

$$+\frac{2(\alpha+\frac{1}{2})}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}d\beta.$$

Es ergibt sich also:

$$(67)\quad \cos\gamma H_\alpha - H_{\alpha-1} = \frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}d\beta + \frac{4}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Differentiation von (66) ergibt:

$$(68)\quad \frac{dH_{\alpha+1}}{d\gamma} - \cos\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} + \sin\gamma H_\alpha = -\frac{2\alpha\sin\gamma}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Dies reduziert sich auf:

$$(69)\quad \frac{dH_{\alpha+1}}{d\gamma} - \cos\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = -(\alpha+1)\sin\gamma H_\alpha - \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ähnlicherweise findet man aus (67):

$$(70)\quad \cos\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} - \frac{dH_{\alpha-1}}{d\gamma} = -\alpha\sin\gamma H_\alpha - \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

In (69) ersetzen wir α durch $\alpha-1$:

$$(71)\quad \frac{dH_\alpha}{d\gamma} - \cos\gamma\frac{dH_{\alpha-1}}{d\gamma} = -\alpha\sin\gamma H_{\alpha-1} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Nun multiplizieren wir (70) mit $\cos\gamma$ und subtrahieren das Resultat von (71):

$$(72):\quad (1-\cos^2\gamma)\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = -\alpha\sin\gamma(H_{\alpha-1}-\cos\gamma H_\alpha) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}(1+\cos\gamma).$$

Folglich:

$$(73)\quad \sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = -\alpha(H_{\alpha-1}-\cos\gamma H_\alpha) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Unter Benutzung von (67) wird dies:

$$\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\beta\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}d\beta + \frac{2(2\alpha+1)}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Differentiation ergibt:

$$(74)\qquad \frac{d}{d\gamma}\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = -\frac{2\alpha(\alpha+1)\sin\gamma}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{(2\alpha+1)}{\pi}\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Folglich hat man als die Differentialgleichung der Funktion $H_\alpha(\cos\gamma)$:

$$(75)\qquad \frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma}+\alpha(\alpha+1)H_\alpha = -\frac{(\alpha+\frac{1}{2})}{\pi}\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Diese Gleichung wird die Legendresche für ganzzahliges α, weil dann die rechte Seite verschwindet.

Um die entsprechende Gleichung für $S_\alpha(\cos\gamma)$ zu erhalten, bilden wir:

$$\left[\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\sin\gamma\frac{d}{d\gamma}+\alpha(\alpha+1)\right]\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Dies ist, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$\frac{1+\cos^2\frac{\gamma}{2}}{4\cos^3\frac{\gamma}{2}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Aus (65) und (75) folgt dann:

$$\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\sin\gamma\frac{dS_\alpha}{d\gamma}+\alpha(\alpha+1)S_\alpha = A\left[\frac{1+\cos^2\frac{\gamma}{2}}{4\cos^3\frac{\gamma}{2}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right]$$

$$-\frac{(\alpha+\frac{1}{2})\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\pi\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$=\frac{A}{\cos\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{1}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{4}+\alpha(\alpha+1)-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Also haben wir schließlich:

$$(76)\qquad \frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\sin\gamma\frac{dS_\alpha}{d\gamma}+\alpha(\alpha+1)S_\alpha = \frac{A}{4\cos^3\frac{\gamma}{2}}.$$

Wiederum wird diese Gleichung die homogene Legendresche für ganzzahliges α. Weiter sieht man, daß für große Werte von α diese Gleichung annäherungsweise die Legendresche wird.

§ 7. Zusammenfassung.

Zum Schluß dieses Kapitels sei auf die vollkommene Analogie unserer Integraldarstellung (55) mit der bekannten Reihendarstellung,

$$f(\theta) = \sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\theta) \int_0^\pi f(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma ,$$

hingewiesen. Was hier der ganze Index n ist, ist dort die kontinuierliche Integrationsvariable $\alpha - \frac{1}{2}$; so daß auch $\frac{2n+1}{2}$ formal genau unserem Faktor α in (55) entspricht. Das Wesentliche für alle Anwendungen ist, daß in beiden Darstellungen der Winkel θ nur als Argument in $P_n(\cos\theta)$ auftritt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Integrationsvariable γ in (55) in der mit P_α nahe verwandten Funktion S_α steht.

Kapitel III.

Allgemeine Lösung des Problems durch bestimmte Integrale.

§ 1. Darstellung von $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$.

In diesem Kapitel benutzen wir die im vorigen Kapitel abgeleitete Integraldarstellung, um die Lösungen der Gleichungen (9)

$$(9) \qquad \begin{cases} \Delta \Pi + k_i^2 \Pi = 0 \\ \Delta \Pi + k_a^2 \Pi = 0 \end{cases}$$

durch Integrale statt durch Reihen auszudrücken.

Zu diesem Zwecke stellen wir die bekannte partikuläre Lösung, die primäre Erregung $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$ durch ein Integral dar. Es ist bequem für das folgende in dem Integral (55) $\alpha - \frac{1}{2}$ durch α zu ersetzen. Dann hat man:

$$(55,\text{a}) \qquad f(\theta) = \int_{-\frac{1}{2}}^\infty (\alpha + \tfrac{1}{2}) \, d\alpha \, P_\alpha(\cos\theta) \int_0^\pi f(\gamma) S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma .$$

Hiernach ist mit

$$R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta} = R(r, \theta)$$

im Intervalle $(0, \pi)$, wenn $r \neq b$:

$$(77) \quad \frac{e^{-ik_\alpha R(r,\theta)}}{R(r,\theta)} = \int_{-\frac{1}{2}}^\infty (\alpha + \tfrac{1}{2}) \, d\alpha \, P_\alpha(\cos\theta) \int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R(r,\gamma)}}{R(r,\gamma)} S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma , \; r \neq b.$$

Wenn θ nicht klein oder nicht nahezu gleich π ist, so daß man die Annäherungsformel für $P_\alpha(\cos\theta)$ anwenden kann, ist es leicht zu zeigen, daß das Integral (77) existiert, wie der Beweis des vorigen Kapitels verlangt. Für $\theta = \pi$ divergiert im allgemeinen das Integral, da $P_\alpha(\cos\theta)$ in diesem Falle für alle nicht ganzzahligen Werte von α unendlich wird.

Für $r = b$ genügt $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$ den Bedingungen des vorigen Kapitels nicht mehr. Trotzdem können wir für $0 < \theta < \pi$ schreiben:

$$\frac{e^{-ik_\alpha R(b,\theta)}}{R(b,\theta)} = \lim_{r=b} \frac{e^{-ik_\alpha R(r,\theta)}}{R(r,\theta)}$$

$$= \lim_{r=b} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha + \tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta) \int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R(r,\gamma)}}{R(r,\gamma)} S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma.$$

Und da der letzte Limes existiert und gleich

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha + \tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta) \int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R(b,\gamma)}}{R(b,\gamma)} S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma$$

ist, bleibt die Darstellung (77) für alle Werte von r gültig, vorausgesetzt nur $0 < \theta < \pi$.

Jetzt definieren wir:

$$(78) \qquad \varphi_\alpha(r,b) = br \int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R(r,\gamma)}}{R(r,\gamma)} S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma, \qquad r < b.$$

Dann nimmt (77) die Form an:

$$(79) \qquad \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} = \frac{1}{br} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha + \tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, \varphi_\alpha(r,b).$$

In der Definition (78) haben wir $r < b$ vorausgesetzt. Im Falle $r > b$ schreiben wir $\varphi_\alpha(b,r)$ statt $\varphi_\alpha(r,b)$.

§ 2. Die Potentiale.
Sender außerhalb der Erde.

Wie im Kapitel I teilen wir den ganzen Raum in drei Gebieten: (1) $r > b$; (2) $a < r < b$; (3) $r < a$ (vgl. Fig. 1). Wir bezeichnen die entsprechenden Potentiale mit Π_1, Π_2, Π_3. Für Π_s, das Potential des Streufeldes in den Gebieten (1) und (2), und für Π_3, das gesamte Potential im Gebiete (3), setzen wir die folgenden Integrale an:

$$(80)\qquad \begin{cases} \Pi_s = \dfrac{1}{br}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, A(\alpha)\, \xi_\alpha(k_a r) \\ \Pi_3 = \dfrac{1}{br}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, B(\alpha)\, \psi_\alpha(k_i r), \end{cases}$$

wo die Funktionen $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$ aus den Grenzbedingungen zu bestimmen sind. Man hat dann für Π_1 und Π_2:

$$\Pi_1 = \left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_1 + \Pi_s$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{e^{-ik_a R}}{R}\right)_2 + \Pi_s.$$

Ausführlicher geschrieben lauten die Integralausdrücke für die drei Potentiale:

$$(81)\qquad \begin{cases} \Pi_1 = \dfrac{1}{br}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, [\varphi_\alpha(b,r) + A(\alpha)\, \xi_\alpha(k_a r)] \\ \Pi_2 = \dfrac{1}{br}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, [\varphi_\alpha(r,b) + A(\alpha)\, \xi_\alpha(k_a r)] \\ \Pi_3 = \dfrac{1}{br}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\, B(\alpha)\, \psi_\alpha(k_i r). \end{cases}$$

Wir haben zur Bestimmung von $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$ die Bedingungen (21) mit der in (2a) definierten Bedeutung von β:

$$\left.\begin{aligned} \beta_i \Pi_3 &= \beta_a \Pi_2 \\ \frac{\partial (r\Pi_s)}{\partial r} &= \frac{\partial (r\Pi_2)}{\partial r} \end{aligned}\right\} r = a.$$

So erhält man die Gleichungen:

$$\beta_i \psi_\alpha(k_i a)\, B(\alpha) = \beta_a \varphi_\alpha(a,b) + \beta_a \xi_\alpha(k_a a)\, A(\alpha),$$
$$k_i \psi'_\alpha(k_i a) B(\alpha) = \varphi'_\alpha(a,b) + k_a \xi'_\alpha(k_a a) A(\alpha),$$

wo

$$\varphi'_\alpha(a,b) = \left[\frac{\partial}{\partial r}\varphi_\alpha(r,b)\right]_{r=a}.$$

Daraus folgt:

$$(82)\qquad \begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{\beta_a k_i \psi'_\alpha(k_i a)\varphi_\alpha(a,b) - \beta_i \psi_\alpha(k_i a)\varphi'_\alpha(a,b)}{\beta_i k_a \psi_\alpha(k_i a)\xi'_\alpha(k_a a) - \beta_a k_i \psi'_\alpha(k_i a)\xi_\alpha(k_a a)} \\ B(\alpha) = \dfrac{\beta_a [k_a \xi'_\alpha(k_a a)\varphi_\alpha(a,b) - \xi_\alpha(k_a a)\varphi'_\alpha(a,b)]}{\beta_i k_a \psi_\alpha(k_i a)\xi'_\alpha(k_a a) - \beta_a k_i \psi'_\alpha(k_i a)\xi_\alpha(k_a a)}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke für $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$ in (81) eingesetzt geben uns die allgemeine Lösung des Problems für eine Kugel aus beliebigem Material.

§ 3. Der Grenzfall des vollkommenen Leiters.

Um die Grenzwerte der Potentiale im Falle eines vollkommenen Leiters zu finden, schreiben wir $A(\alpha)$ in der Form:

$$A(\alpha) = -\frac{1}{k_a \zeta'_\alpha(k_a a)} \frac{\varphi'_\alpha(a,b) - \frac{\beta_a k_i}{\beta_i} \frac{\psi'_\alpha(k_i a)}{\psi_\alpha(k_i a)} \varphi_\alpha(a,b)}{1 - \frac{\beta_a k_i}{\beta_i k_a} \frac{\psi'_\alpha(k_i a)}{\psi_\alpha(k_i a)} \frac{\zeta_\alpha(k_a a)}{\zeta'_\alpha(k_a a)}}.$$

Bei unendlicher Leitfähigkeit der Kugel (d. h. $\lim \sigma_i = \infty$) ist $\beta_i = \infty$ und $\frac{k_i}{\beta_i} = 0$, während $\frac{\psi'(k_i a)}{\psi(k_i a)}$ endlich bleibt. Daher:

$$(83) \qquad \begin{cases} A(\alpha) = -\dfrac{\varphi'_\alpha(a,b)}{k_a \zeta'_\alpha(k_a a)} \\ B(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Π_1 reduziert sich dann auf die Form:

$$(84) \quad \Pi_1 = \frac{1}{br} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha + \tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta) \left\{ \varphi_\alpha(b,r) - \frac{\varphi'_\alpha(a,b)}{k_a \zeta'_\alpha(k_a a)} \zeta_\alpha(k_a r) \right\}.$$

In diesem Ausdruck setzen wir $r = b = a$. D. h. wir nehmen an, daß Sender und Empfänger auf der Erdoberfläche sind. Dann ist:

$$(85) \quad \Pi_1 = \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha + \tfrac{1}{2})\, d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta) \left\{ \varphi_\alpha(a,a) - \frac{\varphi'_\alpha(a,a)}{k_a \zeta'_\alpha(k_a a)} \zeta_\alpha(k_a a) \right\}.$$

Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle Π_1 eine Funktion der einzigen Variablen θ ist. Nach der Definition der Feldkomponenten R, T, Φ ((5) und (6)) lassen sich aus Π_1, durch Differentiation nach θ die normale elektrische Kraft R und die magnetische Kraft Φ berechnen. Die tangentiale Komponente T der elektrischen Kraft ist gleich Null auf der Oberfläche eines vollkommenen Leiters.

Es ist die Aufgabe des folgenden Kapitels, den Annäherungswert des Integrals (85) zu bestimmen.

Kapitel IV.

Diskussion der Integrallösung für den Fall vollkommener Leitfähigkeit.

§ 1. Die Funktion $\varphi_\alpha(r, b)$.

Um den Wert des in Kapitel III abgeleiteten Integrals (85) zu finden, welches das Potential auf der Erdoberfläche für den Fall vollkommener Leitfähigkeit darstellt, benötigen wir eines Ausdrucks für

$$(86) \qquad \varphi_\alpha(r,b) = br \int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R} S_\alpha(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma$$

in bekannten Funktionen. Dieser ist leicht zu erhalten, wenn α ganzzahlig ist. In diesem Falle wird:

$$\frac{\varphi_\alpha(r,b)}{br} = \int_0^\pi \frac{e^{-ik_aR}}{R} P_\alpha(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma.$$

Aus der Reihenentwicklung für $\frac{e^{-ik_aR}}{R}$ nach Kugelfunktionen (vgl. (19) und (20)) schließt man für den Fall $r < b$:

$$\int_0^\pi \frac{e^{-ik_aR}}{R} P_\alpha \sin\gamma\, d\gamma = -\frac{2i}{k_a}\frac{\xi_\alpha(k_ab)}{b}\frac{\psi_\alpha(k_ar)}{r};$$

und für den Fall $r > b$:

$$\int_0^\pi \frac{e^{-ik_aR}}{R} P_\alpha \sin\gamma\, d\gamma = -\frac{2i}{k_a}\frac{\psi_\alpha(k_ab)}{b}\frac{\xi_\alpha(k_ar)}{r}.$$

Folglich ist bei ganzzahligem α:

$$(87)\qquad \begin{cases} \varphi_\alpha(r,b) = -\frac{2i}{k_a}\xi_\alpha(k_ab)\psi_\alpha(k_ar), & r<b \\ \varphi_\alpha(b,r) = -\frac{2i}{k_a}\psi_\alpha(k_ab)\xi_\alpha(k_ar), & r>b. \end{cases}$$

Wegen der nahen Verwandtschaft von S_α mit P_α nehmen wir (87) als einen Annäherungswert für $\varphi_\alpha(r,b)$ für alle Werte von α in (84) und (85) an, um erst später zu zeigen, daß für einen hinlänglich großen Erdradius a der auf diese Weise berechnete Ausdruck für Π_1 eine gute Annäherung an den Wert des Integrals (85) ist.

§ 2. Angenäherte Berechnung des Potentials Π_1.

a) Vereinfachung des Integrals.

Nach Einführung des Ausdruckes (87) für $\varphi_\alpha(r,b)$ in (84) nimmt Π_1 die Form an:

$$(88)\quad \Pi_1 = -\frac{2i}{k_abr}\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \left(\alpha+\tfrac{1}{2}\right) d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\left\{\psi_\alpha(k_ar) - \frac{\psi'_\alpha(k_aa)}{\zeta'_\alpha(k_aa)}\zeta_\alpha(k_ar)\right\}\xi_\alpha(k_ab).$$

Für den Fall, daß Sender und Empfänger beide gerade auf der Erdoberfläche sich befinden, hat man:

$$\Pi_1 = -\frac{2i}{k_aa^2}\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \left(\alpha+\tfrac{1}{2}\right) d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\left\{\frac{\psi_\alpha(k_aa)\zeta'_\alpha(k_aa) - \psi'_\alpha(k_aa)\zeta_\alpha(k_aa)}{\zeta'_\alpha(k_aa)}\right\}\xi_\alpha(k_aa)$$

Unter Benutzung von (24) reduziert sich dies auf:

$$\Pi_1 = -\frac{2}{k_a a^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\,\frac{\zeta_\alpha(k_a a)}{\zeta'_\alpha(k_a a)}. \tag{89}$$

Für das folgende wird es einfacher sein $k_a a = \varrho$ zu setzen. Dann ist:

$$\Pi_1 = -\frac{2k_a}{\varrho^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)d\alpha\, P_\alpha(\cos\theta)\,\frac{\zeta_\alpha(\varrho)}{\zeta'_\alpha(\varrho)}. \tag{90}$$

Wenn man $\alpha + \frac{1}{2}$ durch α ersetzt, hat man:

$$\Pi_1 = -\frac{2k_a}{\varrho^2}\int_{0}^{\infty}\alpha d\alpha\, P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\,\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}. \tag{91}$$

b) **Annäherungsformeln für $\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ und $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$. Verlegung des Integrationsweges.**

Wir suchen einen Annäherungswert des Integrals (91), indem wir Annäherungsformeln für $\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$, $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ und $P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$ einführen. Die Formeln für $\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ und $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ sind aus denen für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ direkt zu erhalten, da

$$\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \text{Const.}\,\sqrt{\varrho}\,H_\alpha^{(2)}(\varrho)$$

ist. Die im folgenden benutzten Annäherungsformeln für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ wurden von Herrn P. Debye[1]) abgeleitet. Für reelles $\alpha < \varrho$, $\varrho >> 1$ ist nach diesen Formeln[2]):

$$\begin{cases} \zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \dfrac{e^{-i\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right)}}{(\sin\tau_0)^{\frac{1}{2}}} \\ \zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = e^{-i\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right)}(\sin\tau_0)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{92}$$

wo τ_0 der durch die Gleichung

$$\cos\tau_0 = \frac{\alpha}{\varrho}$$

definierte Winkel (Näheres bei Debye a. a. O.) und

$$f_0 = \sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0$$

1) Math. Ann. 67, 1909, S. 535. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss., München 1910.

2) Man kann diese Formeln leicht aus den Debyeschen Formeln für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ ableiten. Man findet sie auch in der Abhandlung von Herrn Debye, „Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material", Ann. d. Physik 30, 1909, S, 119.

ist. Nach (92) ist annäherungsweise für Werte von $\alpha < \varrho$ und nicht zu nahe gleich ϱ:

$$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)} = \frac{i}{\sin\tau_0} = \frac{i\varrho}{\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}. \tag{93}$$

Aber für α nahezu gleich ϱ gilt diese Formel nicht mehr und muß durch eine andere ersetzt werden. Für $\alpha > \varrho$ gilt wieder (93).

Wenn also der Integrationsweg die ganze reelle Ache ist, müssen wir drei verschiedene Fälle unterscheiden, $\alpha < \varrho$, α nahe gleich ϱ, und $\alpha > \varrho$. Die hier nicht angegebene Formel für α nahe gleich ϱ ist nicht sehr bequem für Integrationszwecke. Auf einem Weg $OMN\infty$ (Fig. 3) hingegen, dessen erster Teil aus einem Halbkreis mit Mittelpunkt in P, $(\alpha = \varrho)$, und Radius gleich ϱ besteht, ist eine Annäherungsformel für den ganzen Weg anwendbar, wie wir bald zeigen werden. Wir ersetzen also das Integral über den Weg OPN durch ein solches über den Weg OMN. Zunächst wird angenommen, daß keine Singularitäten des Integranden in dem Halbkreis vorhanden sind. Diese Frage wird erst im § 4 untersucht werden.

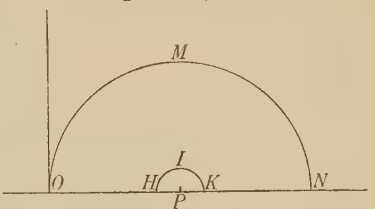

Fig. 3.

Jetzt suchen wir den Wert des Integrals

$$\Pi_1 = -\frac{2k_\alpha}{\varrho^2}\int_{OMN\infty} \alpha\, d\alpha\, P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\,\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}. \tag{94}$$

Zu diesem Zwecke brauchen wir die Annäherungsformeln für $\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ und $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)$ auf dem Integrationsweg $OMN\infty$. Sie ergeben sich aus den asymptotischen Reihen für die zweite Hankelsche Zylinderfunktion, die von Herrn P. Debye[1]) für den Fall eines komplexen Index und komplexen Arguments aufgestellt worden sind. Wie im Falle eines reellen Arguments und reellen Index hängt der Wert des Sommerfeldschen Integrals für $H^{(2)}_\alpha(\varrho)$ ab von dem Teil des Weges, der in der unmittelbaren Nähe eines durch die Gleichung $\cos\tau_0 = \frac{\alpha}{\varrho}$ definierten „Sattelpunktes" τ_0 liegt. In der Debyeschen Abhandlung treten verschiedene Formeln für $H^{(2)}_\alpha(\varrho)$ auf, je nach dem Gebiete in der τ-Ebene, in welchem der Sattelpunkt liegt. Für uns kommt nur das Gebiet der τ-Ebene in Betracht, das dem ersten Quadranten der α-Ebene entspricht. Bei reellem ϱ liegt dieses Gebiet unter der reellen Achse

1) Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss., München 1910.

und zwischen den Linien $\Re(\tau) = 0$ und $\Re(\tau) = \frac{\pi}{2}$. Es sind nun in diesem ganzen Gebiet keine „Übergangskurven“[1]) vorhanden. Daher gilt im ganzen Gebiet (mit Ausnahme der Nähe des Nullpunktes der τ-Ebene, d. h. des Punktes $\alpha = \varrho$ der α-Ebene) die Formel[2]):

$$(95) \qquad H_\alpha^{(2)}(\varrho) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{-i\varrho(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\varrho}{2}\sin\tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{\varrho}{2}\sin\tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{i\pi} A_2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{\varrho}{2}\sin\tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right],$$

wo die Koeffizienten A_0, A_1 usw. folgendermaßen definiert sind:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{1}{8} + \frac{5}{24}\operatorname{cotg}^2\tau_0$$

$$A_2 = \frac{3}{128} + \frac{7}{576}\operatorname{cotg}^2\tau_0 + \frac{385}{3456}\cot^4\tau_0.$$

Diese Formel ist tatsächlich dieselbe wie für reelle α und ϱ, $\alpha < \varrho$. Das erste Glied allein wurde genommen, um die oben benutzten Annäherungsformeln bei reellem α und ϱ abzuleiten. Dieselbe Näherungsformel (93) für $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ genügt auch jetzt für den ganzen Weg OMN, da in diesem Fall $\sin\tau_0$ nicht klein ist und wir uns auf das erste Glied von (95) beschränken dürfen. Es ist klar, daß dieselbe Formel auch für den Weg von N bis ∞ gelten muß. Man kann sie auch aus der Debyeschen Formel für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$, $\alpha > \varrho$ ableiten.[3])

Wir können also das Integral (94) annäherungsweise durch das folgende ersetzen:

$$(96) \qquad \Pi_1 = -\frac{2k_a i}{\varrho} \int_{OMN\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\, d\alpha.$$

Man kann den Weg $OMN\infty$ beliebig verlegen, so lange man keine

1) P. Debye, a. a. O. S. 16.

2) P. Debye, a. a. O. Fig. 5 und Formeln (12), (15), (18), und die Bemerkung, die (18) folgt.

3) P. Debye, Math. Ann. 67, 1909, S. 556 und P. Debye, Ann. d. Phys. 30, 1909, S. 119.

Singularitäten[1]) des Integranden überschreitet. Also wählen wir statt OMN den Weg $OHIKN$ (Fig. 3), wo HIK ein kleiner Halbkreis mit dem Radius ε um den Punkt $P(\alpha = \varrho)$ ist. Den letzteren fügen wir nur hinzu, um nicht in ein falsches Blatt der Verzweigung $\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}$ zu kommen. Der Wert des Integrals über HIK ist natürlich mit ε verschwindend klein. Folglich im Limes $\varepsilon = 0$:

$$(97) \qquad \int_{OMN} \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta)\, d\alpha = \int_0^{2\varrho} \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta)\, d\alpha.$$

(97) in (96) eingesetzt, ergibt:

$$(98) \qquad \Pi_1 = -\frac{2k_a i}{\varrho} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta) d\alpha.$$

c) Einführung der Annäherungsformel für $P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta)$ und Berechnung des resultierenden Integrals.

Um das Integral (98) annäherungsweise zu berechnen, ersetzen wir $P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta)$ durch seine Annäherungsformel[2]) für großes α. Es gilt nämlich für Werte von θ nicht zu nahe gleich 0 und π:

$$(99) \qquad P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi \sin\theta}} \cos\left(\alpha\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Man überzeugt sich leicht, daß man diesen Wert in (98) bei großem ϱ auch für kleines α einsetzen darf, da für großes ϱ die Umgebung der Stelle $\alpha = 0$ einen vernachlässigbaren Beitrag zum Gesamtwerte des Integrals liefert, gleichviel ob die in α oszillierende Funktion $\alpha P_{\alpha - \frac{1}{2}}(\cos\theta)$ oder die ebenfalls oszillierende Funktion

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\pi \sin\theta}} \cos\left(\alpha\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

im Integranden steht. Wegen des Faktors

---

1) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß es sich hier nicht mehr um die Singularitäten des früheren Ausdruckes $\frac{\zeta_{\alpha - \frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha - \frac{1}{2}}(\varrho)}$ handelt, sondern nunmehr um die Funktion $\frac{i\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}$. Der Übergang von der reellen Achse zum Halbkreis war nötig, um diese Annäherungsfunktion einzuführen. Nachträglich steht jetzt nichts im Wege, nach der reellen Achse zurückzugehen.

2) Vgl. z. B. Jahnke und Emde, Funktionentafeln, S. 81.

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}$$

liefert in beiden Fällen die Umgebung der Stelle $\alpha = \varrho$ den Hauptbeitrag zum Werte des Integrals, und aus demselben Grunde wird der Einfluß der Umgebung der Stelle $\alpha = 0$ um so kleiner, je größer ϱ angenommen ist. Folglich hat man als gute Annäherung für (98):

$$(100) \qquad \Pi_1 = -\frac{2k_\alpha i}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{\pi \sin\theta}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} \cos\left(\alpha\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\alpha.$$

Der Wert dieses Integrals bei großem ϱ ist leicht zu finden.

Wir schreiben:

$$J = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} \cos\left(\alpha\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\alpha.$$

Hier setzen wir $\alpha - \varrho = \eta$ und erhalten:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\varrho}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\eta}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\varrho}}} \cos\left[(\varrho + \eta)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}}.$$

Folglich:

$$J = \frac{e^{i\left(\varrho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}} \int_{-\varrho}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\eta}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\varrho}}} e^{i\eta\theta} \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}} + \frac{e^{-i\left(\varrho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}} \int_{-\varrho}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\eta}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\varrho}}} e^{-i\eta\theta} \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}}.$$

Den Hauptbeitrag zum Werte dieser Integrale liefert die Umgebung der Stelle $\eta = 0$. Deshalb hat man für großes ϱ als Annäherungswert für J:

$$J = \frac{e^{i\left(\varrho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\theta} \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}} + \frac{e^{-i\left(\varrho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\theta} \frac{d\eta}{\sqrt{-\eta}}.$$

Die auftretenden Integrale sind bekannt. Das erste kann nach dem Unendlichen der positiv-imaginären Halbebene herübergezogen werden, wo $e^{i\eta\theta}$ verschwindet. Der Integrationsweg von α (vgl. Fig. 3) und daher auch der von η verläuft nämlich oberhalb der reellen Achse und oberhalb des auf ihr gelegenen Verzweigungspunktes $\alpha = 0$ bzw. $\eta = 0$. Deshalb verschwindet das erste Integral. Im zweiten Integral läßt sich der Integrationsweg auf die doppelt umlaufene negativ-imaginäre Achse der η-Ebene zusammenziehen. Dieses Integral ist daher, wenn man noch $\eta = -iy$ setzt, gleich

$$2e^{\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-y\theta}\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\theta}}e^{\frac{i\pi}{4}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Es ergibt sich:

$$J = \frac{e^{-i\left(\varrho\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}e^{i\frac{\pi}{4}} = i\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}e^{-i\varrho\theta}.$$

Dieser Annäherungswert von J in (100) eingesetzt, ergibt für Π_1 den Ausdruck:

$$\Pi_1 = 2\frac{k_a}{\varrho}\frac{1}{\sqrt{\theta\sin\theta}}e^{-i\varrho\theta}. \tag{101}$$

oder, indem wir $k_a a = \varrho$ wieder einführen:

$$\Pi_1 = \frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{\theta\sin\theta}}e^{-ik_a a\theta}. \tag{102}$$

Für Punkte der Erdoberfläche ist dies der angenäherte Ausdruck des Potentials für den Fall eines Senders auf der Oberfläche der als vollkommen leitend gedachten Erde. Dabei darf θ nicht zu klein und auch nicht zu nahe gleich π genommen werden, da in der Ableitung die Annäherungsformel der Kugelfunktion benutzt wurde.

In der Ableitung dieser Formel wurde angenommen, daß kein merklicher Fehler begangen wird, wenn man (86) durch (87) für alle Werte von α ersetzt, und daß keine Singularitäten des Integranden von (94) in dem Halbkreis OMN (Fig. 3) vorhanden sind. Diese Annahmen haben wir jetzt zu bestätigen.

§ 3. Zuverlässigkeit der Darstellung von $\varphi_\alpha(r, b)$ durch $-\frac{2i}{k_a}\xi_\alpha(k_a b)\psi_\alpha(k_a r)$.

Nach (65) können wir $\varphi_\alpha(r, b)$ in der folgenden Form schreiben:

$$\varphi_\alpha(r, b) = br\int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R}\left(H_\alpha(\cos\gamma) + \frac{A}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right)\sin\gamma\, d\gamma \tag{103}$$

$$= \chi_\alpha(r, b) + \eta_\alpha(r, b)$$

wo

$$\chi_\alpha(r, b) = br\int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R}H_\alpha(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma, \tag{104}$$

$$\eta_\alpha(r, b) = 2Abr\int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R}\sin\frac{\gamma}{2} \tag{105}$$

ist. Dann nimmt (85) die Form an:

$$\Pi_1 = M + N$$

wo

$$(106)\quad M = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}(\alpha+\tfrac{1}{2})\,d\alpha\,P_\alpha(\cos\theta)\left\{\chi_\alpha(a,a) - \frac{\chi'_\alpha(a,a)}{k_a\xi'_\alpha(k_a a)}\,\xi_\alpha(k_a a)\right\},$$

$$(107)\quad N = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}(\alpha+\tfrac{1}{2})\,d\alpha\,P_\alpha(\cos\theta)\left\{\eta_\alpha(a,a) - \frac{\eta'_\alpha(a,a)}{k_a\xi'_\alpha(k_a a)}\,\xi_\alpha(k_a a)\right\}$$

ist. Wir wollen zeigen, daß der Annäherungswert von M durch (102) gegeben ist und daß für großes a, N im Vergleich mit M vernachlässigt werden kann.

Wie wir gesehen haben, ist bei ganzzahligem α:

$$\chi_\alpha(r,b) = -\frac{2i}{k_a}\xi_\alpha(k_a b)\psi_\alpha(k_a r),$$

da in diesem Falle $H_\alpha(\cos\gamma) = P_\alpha(\cos\gamma)$ ist.

Man überzeugt sich leicht, daß die Annäherungsformel der Funktion H_α bei großem nicht ganzzahligem α dieselbe ist wie bei großem ganzzahligem α, nämlich:

$$H_\alpha(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi(\alpha+\frac{1}{2})\sin\gamma}}\cos\left[(\alpha+\tfrac{1}{2})\gamma - \frac{\pi}{4}\right].$$

(Identisch mit der Annäherungsformel der Kugelfunktion $P_\alpha(\cos\gamma)$). In der Umgebung von $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi$ gilt diese Formel nicht mehr, aber in dem Integranden in (104), wo wir sie benutzen wollen, kommt der Faktor $\sin\gamma$ vor, so daß der Einfluß dieser Umgebungen aufgehoben wird. Folglich ist für hinlänglich großes nicht ganzzahliges α, annäherungsweise:

$$(108)\qquad \chi_\alpha(r,b) = -\frac{2i}{k_a}\xi_\alpha(k_a b)\psi_\alpha(k_a r),$$

während dies für ganzzahliges α genau der Fall ist. Wir nehmen an, daß (108) für Werte von α größer als $c << k_a a$ gilt. Durch Integration über einen Halbkreis vom Radius $\varrho - c$ um den Punkt $\alpha = k_a a = \varrho$, findet man ähnlich wie bei der Ableitung von (102):

$$(109)\quad M = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{c}(\alpha+\tfrac{1}{2})\,P_\alpha(\cos\theta)\left\{\chi_\alpha(a,a) - \frac{\chi'_\alpha(a,a)}{k_a\xi'_\alpha k_a a)}\,\xi_\alpha(k_a a)\right\}d\alpha$$

$$-\frac{2i}{k_a a^2}\int_{c}^{\infty}(\alpha+\tfrac{1}{2})\,P_\alpha(\cos\theta)\,\frac{k_a a}{\sqrt{(k_a a)^2-\alpha^2}}\,d\alpha.$$

Wir wollen zeigen, daß die Umgebung des Punktes $\alpha = k_a a$ maß-

gebend für den Wert von M ist, indem wir beweisen, daß für $\alpha < c$ der Klammerausdruck im ersten Integral sehr wenig von

$$-\frac{2i}{k_\alpha}\frac{k_\alpha a}{\sqrt{(k_\alpha a)^2-\alpha^2}}$$

abweicht, dem Wert, den wir in der Ableitung von (102) benutzt haben.

Zu diesem Zwecke integrieren wir in (104) partiell. Es ergibt sich:

$$\chi_\alpha(r,b) = \frac{i}{k_\alpha} e^{-ik_\alpha R} H_\alpha \Big]_0^\pi - \frac{i}{k_\alpha}\int_0^\pi e^{-ik_\alpha R}\frac{dH_\alpha}{d\gamma}\,d\gamma.$$

Folglich:

$$\chi_\alpha(a,a) = \frac{i}{k_\alpha} e^{-2ik_\alpha a} H_\alpha(-1) - \frac{i}{k_\alpha} H_\alpha(1) - \frac{i}{k_\alpha}\int_0^\pi e^{-2ik_\alpha a\sin\frac{\gamma}{2}}\frac{dH_\alpha}{d\gamma}d\gamma.$$

Man kann das letzte Integral in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{i}{k_\alpha}\int_0^1 e^{-2ik_\alpha a x}\frac{dH_\alpha}{dx}\cdot dx.$$

Es läßt sich zeigen (vgl. Schluß dieses Paragraphen) daß $\frac{dH_\alpha}{dx}$ überall im Integrationsintervall endlich und stetig ist, mit Ausnahme des Punktes $x=1$. In diesem Punkte wird $\frac{dH_\alpha}{dx}$ wie $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ unendlich. Folglich verschwindet das Integral für großes a wegen der schnell oszillierenden Funktion $e^{-2ik_\alpha a x}$ wie $\frac{1}{\sqrt{2k_\alpha a}}$.

Also hat man annäherungsweise:

$$\chi_\alpha(a,a) = \frac{i}{k_\alpha} e^{-2ik_\alpha a} H_\alpha(-1) - \frac{i}{k_\alpha} H_\alpha(1). \tag{110}$$

Durch Differentiation von (104) findet man

$$\chi'_\alpha(r,b) = -br\int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R^3}(ik_\alpha R+1)(r-b\cos\gamma)H_\alpha\sin\gamma\,d\gamma$$

$$+ b\int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} H_\alpha\sin\gamma.$$

Partielle Integration ergibt:

$$\chi'_\alpha(r,b) = \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}(r-b\cos\gamma)H_\alpha\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}(r-b\cos\gamma)\frac{dH_\alpha}{d\gamma}d\gamma.$$

$$= e^{-ik_a(b+r)} H_\alpha(-1) - e^{-ik_a(b-r)} H_\alpha(1) - \int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R} (r - b\cos\gamma) \frac{dH_\alpha}{d\gamma}\, d\gamma.$$

Folglich:

$$\chi'_\alpha(a, a) = e^{-2ik_a a} H_a(-1) - H_\alpha(1) - \int_0^\pi e^{-2ik_a a \sin\frac{\gamma}{2}} \frac{dH_a}{d\gamma} \sin\frac{\gamma}{2}\, d\gamma.$$

Hier verschwindet das Integral auch wie $\frac{1}{\sqrt{2k_a a}}$.

Deshalb ist annäherungsweise:

(111) $$\chi'_\alpha(a, a) = e^{-2ik_a a} H_\alpha(-1) - H_\alpha(1).$$

Nach (93) ist:

$$\frac{\xi_\alpha(k_a a)}{k_a \xi'_\alpha(k_a a)} = \frac{1}{k_a} \frac{ik_a a}{\sqrt{(k_a a)^2 - (\alpha + \frac{1}{2})^2}}.$$

Für $\alpha < c << k_a a$ hat man in guter Annäherung

$$\frac{\xi_\alpha(k_a a)}{k_a \xi'_\alpha(k_a a)} = \frac{i}{k_a}.$$

Folglich findet man für den Annäherungswert des Klammerausdrucks in (106) bei $\alpha < c$:

(112)
$$\left\{ \begin{aligned} \chi_\alpha(a, a) - \frac{\chi'_\alpha(a, a)}{k_a \xi'_\alpha(k_a a)} \xi_\alpha(k_a a) &= \frac{i}{k_a} e^{-2ik_a a} H_\alpha(-1) - \frac{i}{k_a} H_\alpha(1) \\ &\quad - \frac{i}{k_a} e^{-2ik_a a} H_\alpha(-1) - \frac{i}{k_a} H_\alpha(1) \\ &= -\frac{2i}{k_a} H_a(1). \end{aligned} \right.$$

(102) wurde abgeleitet unter der Annahme, daß

$$\varphi_\alpha(r, b) = -\frac{2i}{k_a} \xi_\alpha(k_a b) \psi_\alpha(k_a r).$$

In diesem Falle wurde der Klammerausdruck in (85) gleich

$$-\frac{2}{k_a} \frac{\xi_\alpha(k_a a)}{\xi'_\alpha(k_a a)} = -\frac{2ik_a a}{k_a \sqrt{(k_a a)^2 - (\alpha + \frac{1}{2})^2}}$$

in erster Annäherung. Also für kleines α annäherungsweise gleich $-\frac{2i}{k_a}$. In dem Integral (106) weicht der Wert des Klammerausdrucks sehr wenig von $-\frac{2i}{k_a}$ ab, da $H_\alpha(1)$ (vgl. Schluß dieses Paragraphen) immer positiv und kleiner als 2 ist. (Für $\alpha > 5$ z. B., ist $H_\alpha(1)$ sehr wenig von 1 verschieden). Man schließt dann wie oben (S. 41), daß man $P_\alpha(\cos\theta)$ durch ihre Annäherungsformel selbst für kleines α ersetzen darf und daß die Umgebung der Stelle $\alpha = k_a a$ maßgebend für

den Wert des Integrals M ist. Folglich, daß der Annäherungswert von M durch (102) dargestellt wird.

Es bleibt übrig zu zeigen, daß N von höherer Ordnung in $\frac{1}{a}$ als M ist. D. h., daß N für hinlänglich großes a zu vernachlässigen ist. Zu diesem Zwecke wollen wir die Annäherungswerte von $\eta_\alpha(a, a)$ und $\eta'_\alpha(a, a)$ bestimmen. Es ist:

$$\eta_\alpha(r, b) = 2brA \int_0^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R} \sin\frac{\gamma}{2} d\gamma$$

$$= brA \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ik_a R}}{R} \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2}} d\gamma + 2brA \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R} \sin\frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

Partielle Integration ergibt:

$$\eta_\alpha(r, b) = \frac{iA}{k_a} e^{-ik_a R} \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} \Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{iA}{2k_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ik_a R} \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} d\gamma$$

$$+ 2brA \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{e^{-ik_a R}}{R} \sin\frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

Folglich:

$$\eta_\alpha(a, a) = \frac{iA}{k_a}(\sqrt{2}e^{-ik_a a\sqrt{2}} - 1) - \frac{iA}{2k_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2ik_a a \sin\frac{\gamma}{2}} \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} d\gamma$$

$$+ aA \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-2ik_a a \sin\frac{\gamma}{2}} d\gamma.$$

Man kann das letzte Integral in der folgenden Form schreiben:

$$2\int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^1 \frac{e^{-2ik_a a x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{und dies ist annäherungsweise gleich} \quad \frac{(\text{Const.})}{\sqrt{2k_a a}}.$$

Also wird $\eta_\alpha(a, a)$ bei großem a durch das letzte Glied annäherungsweise gegeben, nämlich:

$$\eta_\alpha(a, a) = A\sqrt{a}\ (\text{Const.})$$

Man kann N in zwei Integrale zerteilen. Da $A = \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2})\pi}{(\alpha + \frac{1}{2})\pi}$ ist, wird das erste:

$$(113)\quad \begin{cases} \int_{a^2}^{1} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (\alpha+\tfrac{1}{2})\, P_\alpha(\cos\theta)\,\eta_\alpha(a,a)\,d\alpha = \dfrac{\text{Const.}}{a^{\frac{3}{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\, P_\alpha(\cos\theta)\,d\alpha \\ \qquad\qquad = \dfrac{F_1(\theta)}{a^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

wo $F_1(\theta)$ endlich und unabhängig von a ist.

Jetzt berechnen wir den Annäherungswert von $\eta'_\alpha(a, a)$, um den Wert des zweiten Teils von N zu bestimmen.

$$\eta'_\alpha(r,b) = -2brA\int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R^3}(ik_\alpha R+1)(r-b\cos\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$$

$$+\,2bA\int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma.$$

$$= -2brA\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R^3}(ik_\alpha R+1)(r-b\cos\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$$

$$-2brA\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R^3}(ik_\alpha R+1)(r-b\cos\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$$

$$+\,2bA\int_0^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma.$$

Partielle Integration ergibt:

$$\eta'_\alpha(r,b) = A\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\frac{(r-b\cos\gamma)}{\cos\frac{\gamma}{2}}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2brA\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R^3}(ik_\alpha R+1)(r-b\cos\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$$

$$-A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}(r-b\cos\gamma)\frac{d}{d\gamma}\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} + 2bA\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma.$$

Folglich:

$$\eta'_\alpha(a,a) = Ae^{-ik_\alpha a\sqrt{2}} - A - \frac{A}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-2ik_\alpha a\sin\frac{\gamma}{2}}\left(2ik_\alpha a\sin\frac{\gamma}{2}+1\right)d\gamma$$

$$-A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2ik_a a\sin\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}\frac{d}{d\gamma}\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot d\gamma + A\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2ik_a a\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma.$$

Dann ist annäherungsweise bei großem a:

$$\eta_a'(a,a) = -Aik_a a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2ik_a a\sin\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$$

$$= -iA\sqrt{k_a a}\ (\text{Const.}).$$

Folglich hat man für den zweiten Teil von N:

$$\text{II} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}(\alpha+\tfrac{1}{2})P_\alpha(\cos\theta)\frac{\eta_\alpha'(a,a)}{k_a\zeta_\alpha'(k_a a)}\zeta_\alpha(k_a a)\,d\alpha$$

$$= \frac{\text{Const.}}{a^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\cdot P_\alpha(\cos\theta)\cdot\frac{\zeta_\alpha(k_a a)}{k_a\zeta_\alpha'(k_a a)}\,d\alpha.$$

Sei $c \ll k_a a$, so daß nach (93) für alle $\alpha < c$, $\frac{\zeta_\alpha(k_a a)}{\zeta_\alpha'(k_a a)}$ annäherungsweise gleich i ist.

Dann hat man:

$$\text{II} = \frac{C_1}{a^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{1}{2}}^{c}\cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi P_\alpha(\cos\theta)\,d\alpha$$

$$+\frac{C_2 a}{a^{\frac{3}{2}}}\int_c^{\infty}\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}}\frac{\cos\left[(\alpha+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{(k_a a)^2-\alpha^2}}\,d\alpha.$$

Man kann sich leicht überzeugen nach dem Verfahren auf S. 42, daß

$$\int_c^{\infty}\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}}\frac{\cos\left[(\alpha+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{(k_a a)^2-\alpha^2}}\,d\alpha$$

sich wie $\frac{F_2(\theta)}{k_a a}$ verhält, wo $F_2(\theta)$ endlich ist. Und da

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{c}\cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi P_\alpha(\cos\theta)\,d\alpha$$

gleich einer endlichen Funktion von θ, $F_3(\theta)$, ist, hat man:

$$\text{II} = \frac{C_1 F_2(\theta)+C_2 F_3(\theta)}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{F(\theta)}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir haben bewiesen, daß N aus zwei Teilen besteht, welche wie $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ verschwinden. Wir haben aber gefunden, daß M (vgl. 102) nur wie $\frac{1}{a}$ verschwindet. Folglich ist bei großem a, N im Vergleich mit M zu vernachlässigen. Damit ist der Beweis erbracht, daß man einen guten Annäherungswert des Integrals (85) erhält, wenn man

$$\varphi_\alpha(r, b) = -\frac{2i}{k_a}\xi_\alpha(k_a b)\,\psi_\alpha(k_a r)$$

für alle Werte von α setzt.

Zum Schlusse dieses Paragraphen leiten wir gewisse, im vorigen benutzten Eigenschaften von H_α ab.

Wir bestimmen zuerst $H_\alpha(1)$. Nach (64) ist

$$H_\alpha(\cos\gamma) = P_\alpha(\cos\gamma) - \frac{2\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+\frac{1}{2})v}dv}{\{2(\mathfrak{Cof}\,v+\cos\gamma)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Folglich:

$$H_\alpha(1) = 1 - \frac{2\cos(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+\frac{1}{2})v}\cdot dv}{\{2(\mathfrak{Cof}\,v+1)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

$$H_{-\frac{1}{2}}(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{e^{\frac{v}{2}} + e^{-\frac{v}{2}}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{v}{2}}dv}{1+e^{-v}}$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{4} = 0.$$

Für größere Werte von α wird das Integral kleiner wegen des Faktors $e^{-(\alpha+\frac{1}{2})v}$ im Integranden. Es folgt, daß $H_\alpha(1)$ positiv oder Null und immer kleiner als 2 ist. Den Wert Null nimmt es im Falle $\alpha = -\frac{1}{2}$ an.

Untersuchen wir zunächst die Stetigkeit von $\frac{dH_\alpha}{d\gamma}$ im Punkte $\gamma = 0$

$$\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = \frac{dP_\alpha}{d\gamma} - \frac{2}{\pi}\cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\cdot\sin\gamma\int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha+\frac{1}{2})v}\cdot dv}{\{2(\mathfrak{Cof}\,v+\cos\gamma)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Rekursionsformel der P_α ist:

$$\sin\gamma\frac{dP_\alpha}{d\gamma}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\alpha+1}\{P_{\alpha+1}-P_{\alpha-1}\}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\alpha+1}\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos(\alpha+\frac{3}{2})\beta-\cos(\alpha-\frac{1}{2})\beta}{\{2(\cos\beta-\cos\gamma)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{2\alpha(\alpha+1)}{2\alpha+1}\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\sin(\alpha+1)\beta\sin\beta\,d\beta}{\{2(\cos\beta-\cos\gamma)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{2\alpha(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\beta^2 d\beta}{\sqrt{\gamma^2-\beta^2}}$$

$$=-\frac{2\alpha(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}\left[\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\beta}{2}\sqrt{\gamma-\beta^2}+\frac{\gamma^2}{2}\sin^{-1}\frac{\beta}{\gamma}\right)\right]_0^\gamma$$

$$=-\frac{2\alpha(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}\frac{2}{\pi}\frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

D. h. für kleines γ:

$$\sin\gamma\frac{dP_\alpha}{d\gamma}=-\frac{\alpha(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}\sin^2\gamma.$$

$$\frac{dP_\alpha}{d\gamma}=-\frac{\alpha(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}\sin\gamma.$$

Da das zweite Glied in dem Ausdruck für $\frac{dH_\alpha}{d\gamma}$ auch für $\gamma=0$ endlich bleibt, folgt, daß $\frac{dH_\alpha}{d\gamma}$ für $\gamma=0$ endlich ist, und daß auch

$$\frac{dH_\alpha}{\frac{1}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma}=\frac{dH_\alpha}{dx},\quad x=\sin\frac{\gamma}{2},$$

in diesem Punkte endlich ist.

Betrachten wir nun die Umgebung des Punktes $\gamma=\pi$. Nach der Rekursionsformel (73) ist:

$$\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma}=\frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi}\int_\gamma^\pi\frac{\sin\beta\cos(\alpha+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\{2(\cos\gamma-\cos\beta)\}^{\frac{1}{2}}}+A\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Wir setzen in dem Integral $\beta=\pi-\eta$, $\pi-\gamma=\delta$. Dann findet man bei kleinem δ:

$$\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma}=2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi}\delta+\alpha(\alpha+1)\sin(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\frac{\delta^2}{2}+A\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Bei kleinem δ ist $\delta=\sin\gamma$. Dann ist in der Umgebung des Punktes $\gamma=\pi$:

$$\sin\gamma\frac{dH_\alpha}{d\gamma}=2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi}\sin\gamma+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sin(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\sin^2\gamma+A\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Deshalb:

$$\frac{dH_\alpha}{d\gamma} = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\frac{1}{2})\pi} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sin(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi\sin\gamma + \frac{A}{2\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Folglich ist $\frac{dH_\alpha}{d\gamma}$ endlich in der Umgebung des Punktes $\gamma = \pi$. Aber mit $x = \sin\frac{\gamma}{2}$, wird $\frac{dH_\alpha}{dx} = \frac{dH_\alpha}{\frac{1}{2}\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma}$ unendlich wie $\frac{\lambda(\alpha)}{\sqrt{1-x^2}}$ wo $\lambda(\alpha)$ eine endliche Funktion von α bei endlichem α ist.

Wir wollen im nächsten Paragraphen die in der Ableitung von (102) benutzte Behauptung bestätigen, daß keine Singularitäten des Integranden von (91) in dem Halbkreis OMN (Fig. 3) vorhanden sind.

§ 4. Singularitäten der Funktion $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$.

a) Gebiet der Gültigkeit der Formel (93). $|\varrho-\alpha|$ nicht zu klein.

Wir haben gesehen, daß in dem Teil des Halbkreises OMN (Fig. 3), wo das erste Glied der Reihe (95) eine hinreichende Annäherung gibt, die Formel (93) für $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ gilt. Nämlich:

$$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)} = \frac{i\varrho}{\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}. \tag{93}$$

In diesem Teil des Gebietes sind also keine Singularitäten vorhanden. Wie wir sofort sehen werden, gilt die Formel nicht für $\alpha = \varrho$. In der Umgebung dieses Wertes muß man höhere Glieder der Reihe (95) beibehalten, da alsdann $\sin\tau_0$ klein wird. Für unseren Fall wo $\varrho = 2\cdot 10^4$ (Wellenlänge = 2 km angenommen) ist, ergibt sich für das Verhältnis des absoluten Betrages des zweiten Gliedes zum absoluten Betrag des ersten bei $|\alpha-\varrho| = 100$ der Wert $\frac{1}{100}$. Mit zunehmendem $|\alpha-\varrho|$ nimmt dieses Verhältnis rasch ab. Z. B. bei $|\alpha-\varrho| = 200$ hat es den Wert $5\cdot 10^{-5}$. Also braucht man sicher nur das erste Glied beizubehalten, wenn α außerhalb des Kreises $|\alpha-\varrho| = 200$ liegt. *Wir wissen dann aus* (93), *daß keine Singularitäten der Funktion* $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ *außerhalb dieses Kreises im ersten Quadranten liegen.*

b) Kleinere Werte von $|\alpha-\varrho|$. Annäherungsausdruck für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ durch $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$.

Für kleinere Werte von $|\alpha-\varrho|$ müssen wir immer mehr Glieder der Reihe (95) beibehalten und schließlich eine ganz andere Formel

benutzen, die auch von Herrn P. Debye[1]) gefunden wurde. Aber diese Formel ist nicht zum Zweck unserer Untersuchung geeignet. Deshalb leiten wir einen anderen Annäherungsausdruck[2]) für $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ in der Nähe des Punktes $\alpha = \varrho$ ab, der den Vorteil hat, daß er für ziemlich große Werte von $|\alpha - \varrho|$, in der Tat weit in das Gebiet der Anwendbarkeit der Formel (95) hinein, gültig bleibt.

Wir fangen mit der Sommerfeldschen Integraldarstellung der Funktion $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ an:

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = -\frac{1}{\pi}\int_{(2)} e^{-i\varrho\left(\sin\tau - \frac{\alpha}{\varrho}\tau\right)} d\tau, \tag{114}$$

wo der Integrationsweg in den schraffierten Gebieten (Fig. 4) anfangen und endigen muß. Da ϱ als reell vorausgesetzt wird, ist keine Verschiebung[3]) der schraffierten Gebiete nötig. Wir interessieren uns für den Fall, wo $|\alpha - \varrho|$ klein im Vergleich mit ϱ ist und wo der imaginäre Bestandteil von α entweder positiv oder Null ist. In diesem Fall liegt der „Sattelpunkt“[4]) τ_0 des reellen Teils des Exponenten in (114), der durch die Gleichung

$$\cos\tau_0 = \frac{\alpha}{\varrho},$$

definiert ist, in der Nähe des Punktes $\tau = 0$, und zwar auf der reellen Achse für α reell und kleiner als ϱ, auf der negativen imaginären Achse für α reell und größer als ϱ, und in dem vierten Quadranten der τ-Ebene für α komplex mit einem positiven imaginären Bestandteil. Wenn der Sattelpunkt eine von diesen Lagen hat, kann man immer eine Integrationskurve (2) finden, welche in $\pi + i\infty$ anfängt, durch den Sattelpunkt τ_0 hindurchgeht, und in $0 - i\infty$ endigt, und auf welcher der imaginäre Teil des Exponenten in (114) konstant ist.[5])

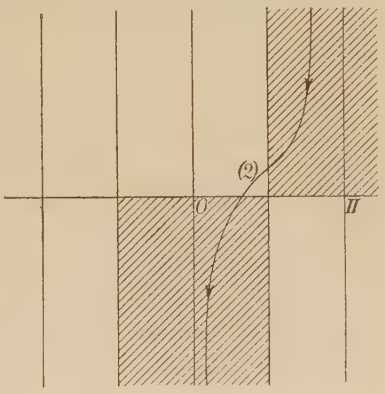

Fig. 4.

1) Math. Ann. 67, 1908, S. 548.

2) Vgl. ähnliche Entwicklungen in dem demnächst erscheinenden Buche von Herrn P. Debye über Regenbogen, Lichtdruck und verwandte Probleme, S. 139 bis 145 (bei B. G. Teubner). Außer für die Überlassung der Korrekturbogen habe ich Herrn Debye für mündlichen Rat in diesem Punkte zu danken.

3) P. Debye, München. Sitzungsber. p. 5. Fig. 1. Bei positivem reellem x ist $\Phi = 0$.

4) P. Debye, Math. Ann. und München. Sitzungsber., a. a. O.

5) Vgl. Debye, München. Sitzungsber. p. 10 und 12.

Da der Wert des Integrals (114) hauptsächlich von dem in der Nähe des „Sattelpunktes“ gelegenen Teil des Wegs abhängt, dürfen wir dieses Integral für α nahezu gleich ϱ und deshalb kleines τ_0 durch das Folgende ersetzen:

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = -\frac{1}{\pi}\int_C e^{i\varrho\left(\frac{\tau^3}{3!}-\left(1-\frac{\alpha}{\varrho}\right)\tau\right)}d\tau \tag{115}$$

wo C von $\infty e^{i\frac{\pi}{6}}$ durch den Sattelpunkt des Exponenten des Integrals (114) nach $-i\infty$ verläuft. Da es nur auf kleine Werte von τ ankommt, hat man in (115) die Funktion $\sin\tau$ des Integrals (114) durch $\tau - \frac{\tau^3}{3!}$ ersetzt und dann den Weg für größere Werte von τ geeigneterweise verlegt. Wie das geschieht, werden wir kurz andeuten.

Der Sattelpunkt τ_0 in (114) ist definiert durch:

$$\cos\tau_0 = \frac{\alpha}{\varrho},$$

der in (115) durch:

$$\frac{\tau_0^2}{2} = 1 - \frac{\alpha}{\varrho}.$$

Deshalb stimmen für α nahezu gleich ϱ, d. h. bei kleinem τ_0, die Lagen der Sattelpunkte in sehr guter Annäherung überein. Weiter hat für beide Integrale die Kurve[1]) $J = \text{const.}$ (J gleich dem imaginären Bestandteil des betreffenden Exponenten) denselben Verlauf in der Nähe des gemeinsamen Sattelpunktes. Es ist leicht zu zeigen, daß die Kurve $J = \text{const.}$ für den Exponenten des Integrals (115) in der einen Richtung nach dem Punkte $\infty e^{i\frac{\pi}{6}}$ und in der anderen nach $-i\infty$ verläuft. Dementsprechend wurde der Weg C gewählt. Da es nur auf die in der Nähe der Sattelpunkte gelegenen Teile der Wege in (114) und (115) ankommt, wird (114) durch (115) sehr gut approximiert.

Setzt man in (115) $\tau = \left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} v$, so hat man:

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}\int_{C'} e^{i(v^3 - zv)}dv \tag{116}$$

wo

$$z = \left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\varrho-\alpha}{\varrho}$$

ist und C' in der v-Ebene ähnlich wie C in der τ-Ebene verläuft. Kehrt man die Integrationsrichtung um, so hat man:

1) Vgl. Debye, Math. Ann. l. c., p. 538.

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{C''} e^{i(v^3 - zv)}\, dv. \tag{117}$$

Der Weg C'' läuft von $0 - i\infty$ nach $\infty\, e^{i\frac{\pi}{6}}$. Dieser Weg ist in Fig. 5 schematisch dargestellt.

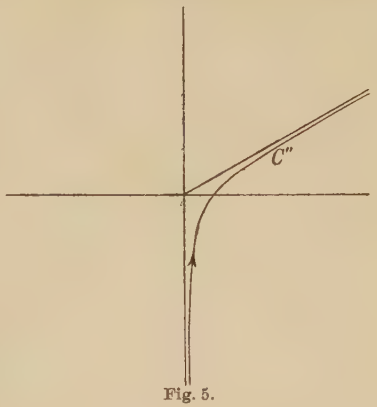

Fig. 5.

Wir definieren[1]) als Airysches Integral:

$$A(z) = \int_{C''} e^{i(v^3 - zv)}\, dv. \tag{118}$$

Dann ist:

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} A(z). \tag{119}$$

Jetzt wollen wir zeigen, daß $A(z)$ sich durch eine Hankelsche Funktion von der Ordnung $\frac{1}{3}$ ausdrücken läßt. Man beweist ohne Schwierigkeit, daß $z^{-\frac{1}{2}} A(z)$ der folgenden Besselschen Differentialgleichung von der Ordnung $\frac{1}{3}$ genügt, in welcher die unabhängige Variable

$$\zeta = 2\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ist, nämlich:

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{9\zeta^2}\right)\right]\left(z^{-\frac{1}{2}} A(z)\right) = 0. \tag{120}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist:

$$z^{-\frac{1}{2}} A(z) = C_1 J_{\frac{1}{3}}(\zeta) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(\zeta). \tag{121}$$

Die Konstanten lassen sich aus den Werten $A(0)$ und $A'(0)$ bestimmen. Dabei braucht man die bekannten Reihen für $J_{\frac{1}{3}}(\zeta)$ und $J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)$:

$$\begin{cases} J_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_0^\infty{}_n \dfrac{(-1)^n \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{3}+n+1\right)} \\ J_{-\frac{1}{3}}(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sum_0^\infty{}_n \dfrac{(-1)^n \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(-\frac{1}{3}+n+1\right)}. \end{cases} \tag{122}$$

Man findet:

---

1) Vgl. Debye „Regenbogen usw." l. c.

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)A'(0)$$

(123)

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)A(0).$$

Nun ist:

$$A(0) = \int_{-i\infty}^{0} e^{iv^3}dv + \int_{0}^{\infty e^{i\frac{\pi}{6}}} e^{iv^3}dv$$

$$= \left(i + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\int_{0}^{\infty} e^{-w^3}dw.$$

Folglich:

(124) $$A(0) = \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Weiter ist:

$$A'(0) = -i\int_{-i\infty}^{0} e^{iv^3}v\,dv - i\int_{0}^{\infty e^{i\frac{\pi}{6}}} e^{iv^3}v\,dv$$

$$= -i\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\int_{0}^{\infty} e^{-w^3}w\,dw.$$

Folglich:

(125) $$A'(0) = \left(-\frac{i}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Dann hat man:

$$C_1 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$C_2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Nach (121) folgt:

$$A(z) = \frac{\pi}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{z}H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(\xi),$$

denn [1])

$$H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(\xi) = -\frac{i}{\sin\frac{\pi}{3}}\left\{e^{i\frac{\pi}{3}}J_{\frac{1}{3}}(\xi) - J_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right\}.$$

Folglich hat man als die gesuchte Annäherungsformel für $H^{(2)}_{\alpha}(\varrho)$, wenn α nahezu gleich ϱ ist:

1) Nielsen l. c. p. 17.

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{3}\left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{z}\, H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(\xi). \tag{126}$$

Da $z = \left(\frac{6}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}(\varrho - \alpha)$ ist, nimmt dies auch die Form an:

$$H_\alpha^{(2)}(\varrho) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{3}\sqrt{\frac{6(\varrho-\alpha)}{\varrho}}\, H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(\xi). \tag{127}$$

Unter Benutzung dieser Annäherungsformel leiten wir eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Pols der Funktion $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ ab. Diese Funktion kann nur unendlich werden, wenn $\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = 0$ ist. Nach der Definition ist:

$$\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \text{Const.}\sqrt{\varrho}\, H_\alpha^{(2)}(\varrho).$$

Deshalb ist:

$$\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \text{Const.}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varrho}} H_\alpha(\varrho) + \sqrt{\varrho}\, H'_\alpha(\varrho)\right).$$

Dies verschwindet nur im Falle:

$$\frac{H'_\alpha(\varrho)}{H_\alpha(\varrho)} = -\frac{1}{2\varrho}.$$

D. h.

$$\frac{d}{d\varrho}\log H_\alpha(\varrho) = -\frac{1}{2\varrho}.$$

Nach (127) ist:

$$\frac{d}{d\varrho}\log H_\alpha(\varrho) = \frac{1}{2(\varrho-\alpha)} - \frac{1}{2\varrho} + \frac{H'_{\frac{1}{3}}(\zeta)}{H_{\frac{1}{3}}(\zeta)}\frac{d\zeta}{d\varrho},$$

wo die Definition von ζ gilt:

$$\zeta = 2\left(\frac{z}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}.$$

Man hat daher auch:

$$\frac{d}{d\varrho}\log H_\alpha(\varrho) = \frac{1}{2(\varrho-\alpha)} - \frac{1}{2\varrho} - \frac{H'_{\frac{1}{3}}(\zeta)}{H_{\frac{1}{3}}(\zeta)}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\varrho-\alpha}\,\frac{(2\varrho+\alpha)}{\varrho^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies ist gleich $-\frac{1}{2\varrho}$ nur wenn:

$$\frac{H'_{\frac{1}{3}}(\zeta)}{H_{\frac{1}{3}}(\zeta)} = -\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}}\,\frac{\varrho}{2\varrho+\alpha}.$$

d. h. wenn (annäherungsweise):

$$\frac{H'_{\frac{1}{3}}(\zeta)}{H_{\frac{1}{3}}(\zeta)} = -\frac{1}{3\zeta}. \tag{128}$$

Dies ist die Bedingung, die erfüllt sein muß, wenn $\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ Singularitäten in der Umgebung des Punktes $\alpha = \varrho$ oberhalb der reellen Achse hat. Die Bedingung (128) lautet:

$$H_{\frac{1}{3}}(\zeta) + 3\zeta H'_{\frac{1}{3}}(\zeta) = 0.$$

Unter Benutzung der Reihen (122) findet man die äquivalente Bedingung:

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} 3\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left\{2 - \frac{3\cdot 8}{4}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 + \frac{3^2\cdot 14}{2!\,4\cdot 7}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^4 - \frac{3^3\cdot 20}{3!\,4\cdot 7\cdot 10}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$$
$$+\frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left\{\frac{3\cdot 6}{2}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 - \frac{3^2\cdot 12}{2!\,2\cdot 5}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^4 + \frac{3^3\cdot 18}{3!\,2\cdot 5\cdot 8}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^6 - \cdots\right\} = 0. \tag{129}$$

Für kleine Werte von $|\zeta|$ dürfen wir uns auf das erste Glied beschränken. In diesem Falle ist die Bedingung (129) nicht erfüllt. Man darf die höheren Glieder vernachlässigen, wenn z. B. $\xi_1 \leqq 0{,}2$ ist. Dies entspricht dem Fall $|\varrho - \alpha| \leqq 10$.

Es sind also keine Singularitäten innerhalb des Kreises $|\varrho - \alpha = 10$. Wenn aber $|\varrho - \alpha_1 = 25$ ist, wird $|\zeta| = 0{,}8$, also beträchtlich größer und die höheren Glieder in (129) sind kaum zu vernachlässigen. Unser Kriterium (129) läßt uns also für das Gebiet innerhalb des Kreises $|\varrho - \alpha| = 200$ und außerhalb $|\varrho - \alpha_1 = 10$ im Stich.

c) Das Zwischengebiet.

Jetzt werden wir zeigen, daß aus physikalischen Gründen keine Pole in diesem Gebiet vorhanden sein können, indem wir annehmen, daß ein Pol in einem Punkte des Gebiets existiert und dann das Residuum des Integranden von (94) in diesem Punkte bilden. Es ergibt sich, daß ein solches Residuum in solcher Form von θ abhängen würde, daß bei zunehmendem θ das elektromagnetische Feld exponentiell zunehmen würde und daß die Residuen von verschiedenen Polen sich nicht gegenseitig aufheben können. Da ein derartiges Verhalten aus-

geschlossen ist, folgt, daß keine Pole in dem betreffenden Gebiet vorhanden sind.

Wir suchen das Residuum der Funktion $\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ für einen Pol in der Nähe des Punktes $\alpha = \varrho$, ϱ als groß und reell vorausgesetzt. Weiter soll der imaginäre Bestandteil von α entweder positiv oder Null sein. Nach der Rekursionsformel [1]) der Funktion $\xi_\alpha(\varrho)$ ist:

$$\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\xi_{\alpha-\frac{3}{2}}(\varrho) - \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\xi_{\alpha+\frac{1}{2}}(\varrho)\right]. \tag{130}$$

Da α sehr groß, kann man α für $\alpha+\frac{1}{2}$ und $\alpha-\frac{1}{2}$ schreiben. Dann ist:

$$\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \frac{1}{2}\left[\xi_{\alpha-\frac{3}{2}}(\varrho) - \xi_{\alpha+\frac{1}{2}}(\varrho)\right].$$

Nun ist:

$$\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \text{Const.}\sqrt{\varrho}\, H^{(2)}_\alpha(\varrho).$$

Folglich:

$$\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho) = \frac{\text{Const.}}{2}\sqrt{\varrho}\,[H^{(2)}_{\alpha-1}(\varrho) - H^{(2)}_{\alpha+1}(\varrho)]$$

und

$$\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)} = 2\,\frac{H^{(2)}_\alpha(\varrho)}{H^{(2)}_{\alpha-1}(\varrho) - H^{(2)}_{\alpha+1}(\varrho)}. \tag{131}$$

Als Annäherung für $H^{(2)}_\alpha(\varrho)$ haben wir gefunden (Gl. (127)):

$$H^{(2)}_\alpha(\varrho) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{3}\sqrt{\frac{6(\varrho-\alpha)}{\varrho}}\,H^2_{\frac{1}{3}}(\xi),$$

wo $\xi = \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\frac{(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}$ ist.

Es ergibt sich dann aus (131):

$$\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)} = 2\,\frac{\sqrt{\varrho-\alpha}\,H_{\frac{1}{3}}(\xi)}{\sqrt{\varrho-\alpha+1}\,H_{\frac{1}{3}}(\xi_1) - \sqrt{\varrho-\alpha-1}\,H_{\frac{1}{3}}(\xi_2)},$$

wo

$$\xi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{(\varrho-\alpha+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{(\varrho-\alpha-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}$$

gesetzt sind. Da wir den Fall $|\varrho-\alpha| \leqq 10$ untersucht haben, nehmen wir an, daß $|\varrho-\alpha| > 10$ ist. Dann kann man, indem man bemerkt, daß $\xi_1 - \xi$ und $\xi_2 - \xi$ klein sind, annäherungsweise schreiben:

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 30, 1909, p. 67.

$$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$$

$$= 2\frac{\sqrt{\varrho-\alpha}\,H_{\frac{1}{3}}(\xi)}{\sqrt{\varrho-\alpha}\left(1+\frac{1}{2(\varrho-\alpha)}\right)\left[H_{\frac{1}{3}}(\xi)+(\xi_1-\xi)H'_{\frac{1}{3}}(\xi)\right]-\sqrt{\varrho-\alpha}\left(1-\frac{1}{2(\varrho-\alpha)}\right)\left[H_{\frac{1}{3}}(\xi)+(\xi_2-\xi)H'_{\frac{1}{3}}(\xi)\right.}$$

$$= 2\frac{H_{\frac{1}{3}}(\xi)}{\frac{1}{\varrho-\alpha}H_{\frac{1}{3}}(\xi)+[(\xi_1-\xi)-(\xi_2-\xi)]H'_{\frac{1}{3}}(\xi)+\frac{1}{2(\varrho-\alpha)}[(\xi_1-\xi)+(\xi_2-\xi)]H'_{\frac{1}{3}}(\xi)}.$$

Nun ist:

$$\xi_1-\xi=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\varrho}}\left[(\varrho-\alpha+1)^{\frac{3}{2}}-(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\varrho}}(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{2(\varrho-\alpha)}-1\right)=\sqrt{\frac{2(\varrho-\alpha)}{\varrho}}.$$

Nach demselben Verfahren:

$$\xi_2-\xi=-\sqrt{\frac{2(\varrho-\alpha)}{\varrho}}.$$

Folglich:

(132) $$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}=2\frac{H_{\frac{1}{3}}(\xi)}{\frac{1}{\varrho-\alpha}H_{\frac{1}{3}}(\xi)+2\sqrt{\frac{2(\varrho-\alpha)}{\varrho}}\cdot H'_{\frac{1}{3}}(\xi)}.$$

Nebenbei bemerken wir, daß wir hier eine Bestätigung eines früheren Resultates finden, denn der Nenner, gleich Null gesetzt, ergibt:

$$\frac{H'_{\frac{1}{3}}(\xi)}{H_{\frac{1}{3}}(\xi)}=-\frac{1}{3\xi}.$$

Also können Pole nur dann vorhanden sein, wenn diese Beziehung erfüllt ist. Da die Residuen von $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$, als eine Funktion von α betrachtet, gesucht werden, drücken wir $H'_{\frac{1}{3}}(\xi)$ durch $\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}$ aus.

$$H'_{\frac{1}{3}}(\xi)=\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\xi}=-\left(\frac{\varrho}{3\xi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}=-\sqrt{\frac{\varrho}{2(\varrho-\alpha)}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}.$$

Dieser Wert in (132) eingesetzt ergibt:

(133) $$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}=\frac{2(\varrho-\alpha)}{1-2(\varrho-\alpha)\frac{\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}}{H_{\frac{1}{3}}}}.$$

Es können also Pole nur in den Punkten existieren, wo

$$\frac{\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}}{H_{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2(\varrho - \alpha)} \tag{134}$$

ist. Wir nehmen an, daß $\frac{\zeta_{\alpha - \frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha - \frac{1}{2}}(\varrho)}$ einen einfachen Pol in dem Punkte $\alpha = \alpha_1$ habe. Dann folgt aus (133), daß das Residuum in diesem Punkte durch den folgenden Ausdruck gegeben wird:

$$R = \left[\frac{2(\varrho - \alpha)}{\frac{d}{d\alpha}\left(1 - 2(\varrho - \alpha)\frac{\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}}{H_{\frac{1}{3}}}\right)} \right]_{\alpha = \alpha_1} \tag{135}$$

Man benötigt also den Wert von $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}}{H_{\frac{1}{3}}}\right)$. Dieser berechnet sich unter Benutzung der Differentialgleichung der $H_{\frac{1}{3}}$ als Funktion von ζ:

$$H''_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\zeta} H'_{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{1}{9\zeta^2}\right) H_{\frac{1}{3}} = 0. \tag{136}$$

Man hat:

$$H'_{\frac{1}{3}} = \frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\zeta} = -\left(\frac{\varrho}{3\zeta}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}.$$

$$H''_{\frac{1}{3}} = \frac{d^2H_{\frac{1}{3}}}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\zeta}\right)^2 + \frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\zeta^2}$$

$$= \left(\frac{\varrho}{3\zeta}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{d^2H_{\frac{1}{3}}}{d\alpha^2} + \frac{1}{3\zeta}\left(\frac{\varrho}{3\zeta}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}.$$

Folglich lautet die Differentialgleichung der $H_{\frac{1}{3}}$ als Funktion der unabhängigen Variable α:

$$\left(\frac{\varrho}{3\zeta}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{d^2H_{\frac{1}{3}}}{d\alpha^2} - \frac{2}{3\zeta}\left(\frac{\varrho}{3\zeta}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha} + \left(1 - \frac{1}{9\zeta^2}\right)H_{\frac{1}{3}} = 0. \tag{137}$$

Man setzt:

$$u = \frac{\frac{dH_{\frac{1}{3}}}{d\alpha}}{H_{\frac{1}{3}}}.$$

Dann ist:

$$\frac{\frac{d^2 H_{\frac{1}{3}}}{d\alpha^2}}{H_{\frac{1}{3}}} = \frac{du}{d\alpha} + u^2.$$

(137) reduziert sich auf die Riccatische Gleichung:

$$\text{(138)} \qquad \left(\frac{\varrho}{3\xi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{du}{d\alpha} + u^2\right) - \frac{2}{3\xi}\left(\frac{\varrho}{3\xi}\right)^{\frac{1}{3}} u + \left(1 - \frac{1}{9\xi^2}\right) = 0.$$

Nach der Definition von ξ ist:

$$3\xi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\varrho}}(\varrho - \alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Also:

$$\left(\frac{\varrho}{3\xi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{\varrho}{2(\varrho - \alpha)}}.$$

Dann nimmt (138) die Form an:

$$\frac{\varrho}{2(\varrho - \alpha)}\left(\frac{du}{d\alpha} + u^2\right) - \frac{\varrho}{2(\varrho - \alpha)^2} u + \left(1 - \frac{\varrho}{8(\varrho - \alpha)^3}\right) = 0.$$

Folglich:

$$\text{(139)} \qquad \frac{du}{d\alpha} = -u^2 + \frac{1}{\varrho - \alpha} u - \frac{2(\varrho - \alpha)}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho}{8(\varrho - \alpha)^3}\right).$$

Durch u ausgedrückt wird das Residuum (135):

$$R = \left[\frac{2(\varrho - \alpha)}{\frac{d}{d\alpha}(1 - 2(\varrho - \alpha)u)}\right]_{\alpha = \alpha_1} = \left[\frac{\varrho - \alpha}{u - (\varrho - \alpha)\frac{du}{d\alpha}}\right]_{\alpha = \alpha_1}.$$

Wir führen den Wert von $\frac{du}{d\alpha}$ aus (139) ein und erhalten:

$$R = \left[\frac{\varrho - \alpha}{u - (\varrho - \alpha)\left[-u^2 + \frac{1}{\varrho - \alpha} u - \frac{2(\varrho - \alpha)}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho}{8(\varrho - \alpha)^3}\right)\right]}\right]_{\alpha = \alpha_1}$$

$$= \left[\frac{\varrho - \alpha}{(\varrho - \alpha)u^2 + \frac{2(\varrho - \alpha)^2}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho}{8(\varrho - \alpha)^3}\right)}\right]_{\alpha = \alpha_1}.$$

In einem Pole α_1 muß $u = \frac{1}{2(\varrho - \alpha_1)}$ sein. (Vgl. (134).) Folglich:

$$\text{(140)} \qquad R = \frac{\varrho - \alpha_1}{(\varrho - \alpha_1)\frac{1}{4(\varrho - \alpha_1)^2} + \frac{2(\varrho - \alpha_1)^2}{\varrho} - \frac{1}{4(\varrho - \alpha_1)}}$$

$$= \frac{\varrho}{2(\varrho - \alpha_1)}.$$

Dieses Resultat wurde abgeleitet unter der Annahme, daß der Pol in α_1 ein einfacher sei. Nun wollen wir zeigen, daß kein Pol höherer

Ordnung in dem untersuchten Gebiet vorkommen kann. Wir benutzen die Formel (133):

$$\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)} = \frac{2(\varrho-\alpha)}{1-2(\varrho-\alpha)u}.$$

Aus diesem Ausdruck folgt, daß in der Nähe eines Pols $\alpha = \alpha_1$ die Funktion u die folgende Entwicklung haben muß:

$$u = \frac{1}{2(\varrho-\alpha_1)} + (\alpha-\alpha_1)\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \frac{(\alpha-\alpha_1)^2}{2!}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \cdots$$

Wenn α_1 ein einfacher Pol ist, muß $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1}$ von Null verschieden sein. Wir suchen also den Wert von $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1}$ in einem Pol. Dieser folgt aus Gleichung (139), indem wir $u = \frac{1}{2(\varrho-\alpha_1)}$ setzen. Es ergibt sich:

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = -\frac{1}{4(\varrho-\alpha_1)^2} + \frac{1}{2(\varrho-\alpha_1)^2} - \frac{2(\varrho-\alpha_1)}{\varrho} + \frac{1}{4(\varrho-\alpha_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2(\varrho-\alpha_1)^2} - \frac{2(\varrho-\alpha_1)}{\varrho}.$$

Folglich kann $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1}$ nur dann Null sein, wenn

$$4(\varrho-\alpha_1)^3 = \varrho$$

ist. Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\varrho - \left(\frac{\varrho}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varrho - e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{\varrho}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varrho - e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{\varrho}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Es können Pole höherer Ordnung nur in diesen Punkten vorkommen. Der erste ist jedoch auszuschließen, da die Funktion $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ sich regulär auf der reellen Ache verhält. Der zweite hat einen negativen imaginären Bestandteil und liegt deshalb nicht in dem Gebiet, das wir untersuchen. Der dritte kann nur ein Pol sein, wenn die Bedingung (129) erfüllt ist. Nach der Definition ist:

$$\zeta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(\varrho-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}.$$

Für den dritten Punkt ist also:

$$\zeta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\left[e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{\varrho}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Dies in (129) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{2-\frac{3\cdot 8}{4}\cdot\frac{1}{18}+\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\left\{\frac{3\cdot 6}{2}\cdot\frac{1}{18}-\frac{3^2\cdot 12}{2!\,2\cdot 5}\left(\frac{1}{18}\right)^2+\cdots\right\}.$$

Da das erste Glied einen imaginären Bestandteil hat und das zweite reell ist, sieht man, daß dieser Ausdruck nicht verschwindet. Es existiert daher kein Pol in dem fraglichen Punkt.

Wir haben damit bewiesen, daß Pole, die möglicherweise in dem betreffenden Gebiet vorkommen, einfach sind. Es bleibt übrig, zu zeigen, daß die Funktion keine anderen Singularitäten als Pole in diesem Gebiet hat, d. h., daß sie meromorph ist. Nach der Integraldarstellung von $H_\alpha^{(2)}(\varrho)$ (vgl. (114)) ist:

$$\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)=\text{Const}\int_{(2)}e^{-i\varrho\sin\tau}e^{i\alpha\tau}\sqrt{\varrho}\,d\tau.$$

Folglich:

$$\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)=\text{Const}\int_{(2)}e^{-i\varrho\sin\tau}e^{i\alpha\tau}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\varrho}}-\sqrt{\varrho}\,i\sin\tau\right\}d\tau.$$

Beide Integrale stellen ganze Funktionen von α dar. Deshalb ist der Quotient eine meromorphe Funktion.

Es ist also bewiesen, daß die einzig möglichen Singularitäten der Funktion $\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ in dem Gebiet der α-Ebene oberhalb der reellen Achse in der Umgebung des Punktes $\alpha=\varrho$ einfache Pole sind und daß in diesen Polen, α_1, die Residuen den Wert $\frac{\varrho}{2(\varrho-\alpha_1)}$ haben.

Nun haben wir den Weg des Integrals

$$\Pi_1=-\frac{2k_\alpha}{\varrho^2}\int_0^\infty \alpha P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\xi'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}\,d\alpha \tag{91}$$

auf den Weg $OMN\infty$ verlegt. (Vgl. Fig. 3.) Wenn Pole überschritten wären, wäre das Integral (91) gleich dem über den verlegten Weg genommenen Integral vermehrt um $2\pi i$ mal der Summe der Residuen des Integranden in den überschrittenen Polen. Da $\alpha P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$ regulär ist, ist das Residuum des Integranden in einem Punkte $\alpha=\alpha_1$ gleich:

$$R=\frac{\varrho\alpha_1}{2(\varrho-\alpha_1)}P_{\alpha_1-\frac{1}{2}}(\cos\theta). \tag{141}$$

Da nun α_1 in dem betreffenden Gebiet groß ist, dürfen wir $P_{\alpha_1-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$ durch seinen Annäherungswert ersetzen. Dann nimmt das Residuum die Form an:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\,\frac{\varrho\sqrt{\alpha_1}}{\varrho-\alpha_1}\cos\left(\alpha_1\theta-\frac{\pi}{4}\right). \tag{141a}$$

Nun hat α_1 die Form $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, wo a_1 und b_1 positiv sind, und b_1 nicht beliebig klein ist, da der Integrand sich regulär auf der reellen Achse verhält. Folglich hat man:

$$R = \frac{\varrho\sqrt{\alpha_1}}{2(\varrho-\alpha_1)}\left[e^{i\left(a_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-b_1\theta}+e^{-i\left(a_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)}e^{b_1\theta}\right].$$

Für größere Werte von θ ist das erste Glied in der Klammer gegen das zweite zu vernachlässigen. Das zweite zeigt eine exponentielle Zunahme mit zunehmendem θ. Wenn nun zwei Pole vorhanden wären, so würde das Residuum des Pols, der den größeren imaginären Bestandteil hat, überwiegen, d. h. die Residuen können sich nicht gegenseitig aufheben. Wenn die zwei Pole gleiche imaginäre Bestandteile besitzen wird die Summe der Residuen:

$$R_1+R_2 = \frac{\varrho e^{b\theta}}{2}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\varrho-\alpha_1}e^{-i\left(a_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\varrho-\alpha_2}e^{-i\left(a_2\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\right\}.$$

(Das Glied mit $e^{-b\theta}$ wurde vernachlässigt.)

Setzen wir:

$$\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\varrho-\alpha_1} = A_1 e^{i\Phi_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\varrho-\alpha_2} = A_2 e^{i\Phi_2},$$

dann verschwindet der Ausdruck in der Klammer nur, wenn

$$\begin{cases} A_1\cos\left(\Phi_1-a_1\theta+\frac{\pi}{4}\right)+A_2\cos\left(\Phi_2-a_2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ A_1\sin\left(\Phi_1-a_1\theta+\frac{\pi}{4}\right)+A_2\sin\left(\Phi_2-a_2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0. \end{cases}$$

Aber es gibt nur eine endliche Zahl von Werten von θ zwischen 0 und π, die diesen Gleichungen genügen. Also können die Residuen von zwei solchen Polen sich nur an diesen Stellen gegenseitig aufheben. Ähnliche Schlüsse kann man für eine größere Anzahl von Polen ziehen.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, daß die Existenz von Polen der Funktion $\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$ in dem fraglichen Gebiet eine exponentielle Zunahme des Feldes mit zunehmendem θ bedingen würde. Ein solches Verhalten ist aus physikalischen Gründen unmöglich. Wir schließen daher, daß keine Pole in dem ganzen Halbkreise OMN vorhanden sind. Also war die Verlegung des Integrationsweges in (91) erlaubt und (102) stellt einen Annäherungswert dieses Integrals dar.

§ 5. Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Nicholson.

In diesem Paragraphen bringe ich zwei Punkte aus der Nicholsonschen Arbeit vor, die mir nicht mathematisch einwandfrei scheinen.

Auf Seite 168[1]) lesen wir Folgendes:

„Then $m = \nu$ is a pole of the function u and this must be a simple pole because u is proportional to the ratio of $z^{\frac{1}{2}}K_m(z)$ to its derivate".

Nun ist aber die Ableitung der Funktion $z^{\frac{1}{2}}K_m(z)$ (unsere $\xi_\alpha(\varrho)$) nach z statt nach m genommen, da wir u so definiert finden (S. 167):

$$u = (\text{Const})\, m\, R_n(1 + e^{2i\chi_n})$$

$$= (\text{Const})\, m \frac{z^{\frac{1}{2}}K_m(z)}{\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}}K_m(z)\right)}\,.\ ^{2})$$

Es ist mir nicht klar, wie man aus dieser Form der Funktion u *als einer Funktion von* z, nachdem man sie noch durch ihre Ableitung nach z dividiert hat, irgendeinen Schluß über die Natur der Pole dieser Funktion *in der Ebene eines Parameters* m ziehen kann. Selbst wenn die Ableitung nach m genommen wäre, könnte man nur behaupten, daß eine Nullstelle $m = \nu$ eine einfache wäre. Herrn Nicholsons spätere Untersuchungen in dieser Abhandlung stützen sich wesentlich auf die Einfachheit der Pole seiner Funktion u. Es ist also wichtig für sein Resultat, zu wissen, ob die Pole einfach sind. Die Pole, die er betrachtet, liegen im vierten Quadranten der m-Ebene, also in einem von mir nicht untersuchten Gebiete.

Ein zweiter Prozeß scheint mir fraglich, nämlich die Benutzung des Operators $G(\theta)$.[3]) Im folgenden Beispiel, das Seite 170[4]) entnommen ist, tritt der fragliche Charakter des Prozesses am augenfälligsten hervor.

Für Punkte auf der Oberfläche ist[5]):

$$\gamma\varrho = \frac{i\sin^2\theta}{ka^2}\sum_1^\infty n m R_n(1 + e^{2i\chi_n})\frac{dP_n}{d\mu}\,.$$

(γ = magnetische Kraft. $\mu = \cos\theta$, $m = n + \frac{1}{2}$, $\varrho = a\sin\theta$). Wenn man die Integraldarstellung von P_n, nämlich:

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi \cdot d\varphi}{\{2(\cos\theta - \cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}$$

1) Phil. Magazine July 1910. 2) Vgl. S. 169 oder Phil. Mag. Apr. 1910 S. 522.
3) Eingeführt auf S. 531 Phil. Mag. Apr. 1910.
4) Phil. Mag. July 1910. 5) Phil. Mag. April 1910 p. 523.

einführt, nimmt dies die Form an:

$$\gamma\varrho = \frac{2i\sin^2\theta}{ka^2\pi}\sum_1^\infty (n+\tfrac{1}{2})R_n(1+e^{2i\chi_n})\frac{d}{d(\cos\theta)}\int_\theta^\pi \frac{\sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\theta-\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Auf Seite 170 finden wir folgendes für dieselbe Größe $\gamma\varrho$:

$$\gamma\varrho = G(\theta)\sum_1^\infty m R_n(1+e^{2i\chi_n})\sin m\varphi, \qquad (m=n+\tfrac{1}{2})$$

wo

$$G(\theta)\omega = \frac{2i\sin^2\theta}{ka^2\pi}\frac{d}{d\theta}\int_\theta^\pi \frac{\omega\, d\varphi}{\{2(\cos\theta-\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

(Es muß bei Nicholson $-2i\sin\theta$ statt $2i\sin^2\theta$ heißen). Ausführlicher geschrieben ist diese Gleichung für $\gamma\varrho$:

$$\gamma\varrho = -\frac{2i\sin\theta}{ka^2\pi}\frac{d}{d\theta}\int_\theta^\pi \frac{d\varphi}{\{2(\cos\theta-\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}\sum_1^\infty (n+\tfrac{1}{2})R_n(1+e^{2i\chi_n})\sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi.$$

(Ich habe $-2i\sin\theta$ statt $2i\sin^2\theta$ geschrieben.) Wir sehen, daß nach diesem Verfahren die Reihenfolge der Operationen, Summation, Differentiation und Integration, in dem ursprünglichen Ausdruck für $\gamma\varrho$ vertauscht ist. Ob diese Vertauschung der Operationen erlaubt ist, scheint mir sehr fraglich, besonders da die Reihe in der letzten Gleichung überhaupt nicht konvergiert. Von dieser letzten Tatsache überzeugt man sich leicht, indem man bemerkt, daß

$$R_n(1+e^{2i\chi_n}) = -2i\frac{z^{\frac{1}{2}}k_m(z)}{\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}}k_m(z)\right)} = -2i\frac{\zeta_n(z)}{\zeta_n'(z)}$$

in unserer Schreibweise ist. Es scheint mir nötig zu beweisen, daß die Summe, die sich aus der zweiten Form für $\gamma\varrho$ berechnet, gleich der Summe der ursprünglichen Reihe ist. Ich finde keine Untersuchung dieses Punktes bei Herrn Nicholson.

§ 6. Diskussion des Resultats.

Unser Ausdruck (102), der das Potential für den Fall vollkommener Leitfähigkeit gibt, zeigt nicht den raschen Abfall mit dem Abstand von dem Sender, den sowohl Poincaré wie Nicholson gefunden haben. Bei diesen Autoren ist der Abfall der Wellenamplitude durch einen Faktor $e^{-\text{Const}(k_a a\theta)^{\frac{1}{3}}}$ statt durch $\frac{1}{\sqrt{\theta\sin\theta}}$ dargestellt. Bei einem so

raschen Abfall wie dem durch $e^{-\text{Const}(k_a a\theta)^{\frac{1}{3}}}$ bedingten, wären die Ergebnisse der drahtlosen Telegraphie unerklärlich. Dagegen scheint die Formel (102) eine genügende Erklärung zu geben.

Wir können die Natur der Ausbreitung nach Formel (102) anschaulich machen, indem wir sie in der Form schreiben:

$$\Pi_1 = 2\,\frac{1}{\sqrt{a\theta}}\,\frac{1}{\sqrt{a\sin\theta}}\,e^{-ik_a a\theta}.$$

Die Änderung der Amplitude ist also durch zwei Faktoren bedingt. Der eine, $\frac{1}{\sqrt{a\theta}}$, ist gleich der reziproken Quadratwurzel des sphärischen Abstandes des Aufpunktes vom Sender. Der andere, $\frac{1}{\sqrt{a\sin\theta}}$, ist gleich der reziproken Quadratwurzel des Radius des Breitenkreises durch den Aufpunkt. Der letztere Faktor gibt die Änderung der Amplitude des Feldes im Falle reiner Oberflächenwellen auf der Kugel. Bei solchen Wellen geht dieselbe Energie durch jeden Breitenkreis. Also müßte die Energie wie $\frac{1}{a\sin\theta}$ abnehmen. Deshalb würde die Amplitude des Feldes sich wie $\frac{1}{\sqrt{a\sin\theta}}$ ändern. In dem von Sommerfeld behandelten ebenen Falle, beträgt diese Amplitudenabnahme $\frac{1}{\sqrt{r}}$, wo r den linearen Abstand vom Sender bedeutet. Der erste Faktor bedingt einen zusätzlichen Abfall der Amplitude, der allerdings für größere Abstände nicht sehr rasch ist. Z. B. ist der Wert von $\frac{1}{\sqrt{a\theta}}$ für $\theta = 150^0$ gleich $\frac{1}{5}$ des Wertes für $\theta = 6^0$. Wir schließen, daß die Wellen der drahtlosen Telegraphie zwar den Oberflächentypus haben, aber nicht reine Oberflächenwellen sind. Zu der Änderung der Amplitude, die den Oberflächenwellen eigen ist, tritt eine durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{a\theta}}$ bedingte Abnahme hinzu. Die letztere ist aber für größere Abstände verhältnismäßig gering. Für kleine Werte von θ geht unser Ausdruck von Π_1 direkt über in den Ausdruck (11) der primären Erregung, bis auf den Faktor 2, welcher von der Spiegelung an der vollkommen leitend gedachten Erde herrührt.[1])

In Fig. 6 ist die Kurve der Amplitude $\frac{1}{\sqrt{\theta\sin\theta}}$ für Werte von θ zwischen 5^0 und 175^0 gezeichnet. Für θ etwas größer als 90^0 zeigt

1) Das Entsprechende zeigt sich bei H. von Hörschelmann, Über die Wirkungsweise des geknickten Marconischen Senders", Diss. München 1911, S. 18.

sich ein bemerkenswertes Verhalten, da die Amplitude ein Minimum in der Nähe des Wertes $\theta = 110^0$ erreicht und dann allmählich steigt. Dies war zu erwarten wegen der Zusammenziehung der Breitenkreise mit zunehmendem θ, wenn $\theta > \frac{\pi}{2}$ ist, da durch jeden dieser Kreise bei reinem Oberflächentypus der Wellen dieselbe Energie hindurchgehen würde. Daß das Minimum nicht in $\theta = \frac{\pi}{2}$ erreicht wird, ist durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{a\theta}}$ erklärt.

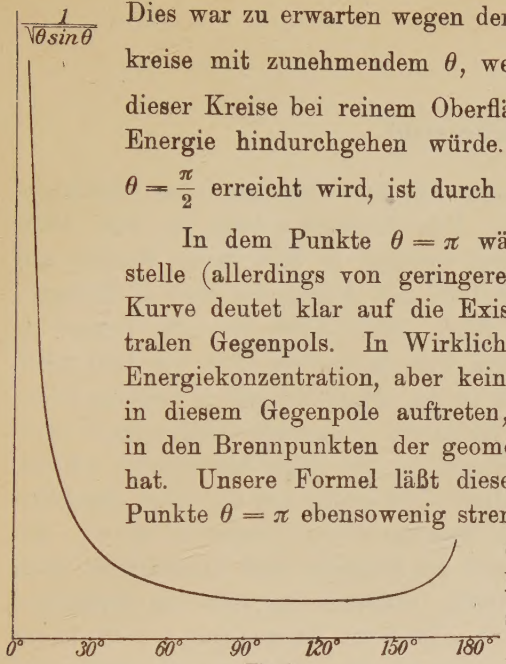

Fig. 6.

In dem Punkte $\theta = \pi$ wäre eine zweite Unendlichkeitsstelle (allerdings von geringerer Ordnung) zu erwarten. Die Kurve deutet klar auf die Existenz eines zum Sender diametralen Gegenpols. In Wirklichkeit wird zwar eine merkliche Energiekonzentration, aber keine unendliche Energieanhäufung in diesem Gegenpole auftreten, ebensowenig wie eine solche in den Brennpunkten der geometrischen Optik tatsächlich statt hat. Unsere Formel läßt diese Möglichkeit offen, da sie im Punkte $\theta = \pi$ ebensowenig streng gilt wie am Orte des Senders $\theta = 0$. Natürlich wird in Wirklichkeit dieser Anhäufungseffekt auch durch die Dämpfung in der Atmosphäre sehr heruntergedrückt, wenn nicht ganz unmerklich gemacht, da in Wirklichkeit entgegen unserer letzten Figur k_a nicht rein reell ist, sondern wegen des Ionengehaltes der Luft, einen imaginären Bestandteil besitzt.

Den Fall der unvollkommen leitenden Erde hoffe ich mit derselben Methode behandeln zu können. Es scheint mir unzweifelhaft, daß auch für diesen Fall unser Hauptresultat ohne wesentliche Änderung bestehen bleiben wird, nämlich: die Wellen der drahtlosen Telegraphie werden nicht im Sinne der geometrischen Optik und der geradlinigen Strahlenausbreitung durch die Erdkrümmung abgeschirmt, sondern überwinden diese durch eine Art Oberflächenausbreitung.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Sommerfeld meinen aufrichtigen Dank sagen für das fördernde Interesse, das er den Fortschritten dieser Untersuchung entgegengebracht hat.

Lebenslauf.

Am 14. Dezember 1878 wurde ich zu Ocheyedan Iowa (Vereinigte Staaten von Amerika) geboren. Von September 1892 bis Juni 1894 besuchte ich das „Kansas Normal College“ in Fort Scott, Kansas und von September 1895 bis August 1897 das „Valparaiso Normal College“, Valparaiso, Indiana. In dem Jahre 1897—1898 war ich Lehrer in einer Schule meiner Heimat und von September 1898 bis Juni 1901 war ich Lehrer der Mathematik in der „High School“ in Castana Iowa.

Im September 1901 wurde ich an der „University of Michigan“ (Ann Arbor, Michigan) immatrikuliert, wo ich vier Jahre Mathematik, Physik und Astronomie studierte. Im Juni 1904 erhielt ich den Grad „Bachelor of Arts“ und im Juni 1905 die Magisterwürde („Master of Arts“). Ich blieb auf der Universität während des Sommers und beschäftigte mich weiter mit der Experimentalphysik. Während der Zeit von September 1902 bis Juni 1905 war ich Assistent in Astronomie bei Professor Asaph Hall jr. Von September 1905 bis Juni 1906 war ich „Instructor in Physics“ an der Princeton University (Princeton, New Jersey) und von September 1906 bis August 1909 „Instructor in Mathematics“ an der „University of Wisconsin“ (Madison, Wisconsin). Im Herbst 1909 kam ich nach München, um bei Herrn Professor Sommerfeld zu arbeiten. In Princeton habe ich eine experimentelle Untersuchung der magnetischen Suszeptibilität von Lösungen ausgeführt.

An der „University of Michigan“ hörte ich bei den Professoren Beman, Glover, A. Hall jr., Markley, Reed, und Ziwet; an der „University of Wisconsin“ bei den Professoren Skinner, Slichter, und Van Vleck; an der Universität München bei den Professoren Debye, Graetz, Pringsheim, Seeliger, und Sommerfeld.